(حل یک معادله تفاضلی از روش تابع مولد :)

مسأله: ۴- فصل دوم:

اگر $\{S_n, n\geq 1\}$ یک فرآیند دوجمله‌ای با احتمال موفقیت p باشد و

$$P_n = P[S_n = 2k], \quad k=0,1,2,\ldots$$

آنگاه ثابت کنید:

$$P_n = \frac{1}{2}\left[1+(p-q)^n\right], \quad n=0,1,2,\ldots$$

حل: نشان داده شد که:

$$(A)\begin{cases} P_n = p(1-P_{n-1}) + qP_{n-1}, & n=1,2,\ldots \\ P_0 = 1 \end{cases}$$

فرض کنید $M(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} t^n P_n$ ، $|t|<1$ (C) تابع مولد دنباله $\{P_n, n\geq 0\}$ باشد.

در این صورت با ضرب طرفین معادله (A) در t^n و جمع‌بندی روی n داریم:

$$(B)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} t^n P_n = p\sum_{n=1}^{+\infty}(1-P_{n-1})t^n + q\sum_{n=1}^{+\infty} t^n P_{n-1}$$

$$= p\sum_{n=1}^{+\infty} t^n + (q-p)\sum_{n=1}^{+\infty} t^n P_{n-1}$$

چون:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} t^n P_{n-1} = t\sum_{n=1}^{+\infty} t^{n-1}P_{n-1} = tM(t) \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} t^n P_n = M(t)-P_0 = M(t)-1$$

بنابراین معادله (B) به صورت ساده می‌شود:

$$(B) \Rightarrow M(t)-1 = \frac{pt}{1-t} + (q-p)tM(t)$$

$$\Rightarrow M(t) = \frac{1}{1-(q-p)t} + \frac{pt}{(1-t)(1-(q-p)t)} \overset{(D)}{=} \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1-(q-p)t}\right\} \overset{(E)}{=} \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} t^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(q-p)^n t^n\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2}\left[1+(q-p)^n\right]t^n \overset{C}{\Longrightarrow} P_n \overset{(F)}{=} \frac{1}{2}\left[1+(q-p)^n\right], \quad n=0,1,2,3,\ldots$$

(D) ← از روش تجزیه یک کسر به دو کسر استفاده شده است

(E) ← جمع سری هندسی.

(F) ← از مقایسه $M(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}\left[1+(q-p)^n\right]t^n$ و $M(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P_n$ نتیجه می‌شود.