تمرین: نیمسال دوم 1398

1- فرض کنید $\{X_n \ , n \geq 1\}$ یک فرآیند گام برداری تصادفی با $X_0 = C$ باشد،

الف-مطلوبست محاسبه هریک از احتمالات زیر :

$$P[X_n \geq ۰, n = ۱,۲,۳,۴] \quad و \quad P[X_n \neq ۰, n = ۱,۲,۳,۴]$$

$$P[X_n \leq ۲, n = ۱,۲,۳,۴] \quad و \quad P[|X_n| \leq ۲, n = ۱,۲,۳,۴,]$$

ب-نشان دهید فرایند گام برداری تصادفی: با نموهای مستقل و درنتیجه ایستای کواریانس نیست-دارای ویژگی مارکوفی است.

2- در تمرین 1 فرض کنید $Y_n = X_{۲n}$ و $Z_n = X_{۲n+۱}$، احتمالات تغییر وضعیت را برای دو فرآیند $\{Y_n\}$ و $\{Z_n\}$ بدست آورید.

3- سکه سالمی متوالیاً پرتاب می‌شود، فرض کنید H_n و T_n بترتیب معرف تعداد شیرها و خطهای حاصل در n پرتاب اول باشند. قرار می‌دهیم $X_n = H_n$ و $Y_n = H_n - T_n$. احتمالات تغییر وضعیت را برای فرآیندهای $\{X_n\}$ و $\{Y_n\}$بدست آورید.

4- فرض کنید N تعداد دفعاتی باشد که در گام برداری تصادفی ساده جسم متحرک به نقطه شروع بر می گردد. نشان‌دهید N یک متغیرتصادفی‌گسسته با تابع‌احتمال $P[N = k] = \alpha(۱-\alpha)^k, k = ۰,۱,۲,...$ است که در آن $\alpha = |p - q|$ و p احتمال این است که فرآیند یک گام به راست بردارد.

5- فرآیند گام برداری تصادفی ساده با وضعیت جاذب صفر و وضعیت نگه دارنده N رادر نظر بگیرید. یعنی:

$$P[X_{n+۱} = N | X_n = N] = p, P[X_{n+۱} = N - ۱ | X_n = N] = q$$

یک معادله تفاضلی برای متوسط تعداد گامهای لازم با شروع از j $\quad 0 \leq j \leq N$ برای رسیدن به صفر به دست آورید. با حل معادله تفاضلی فوق نتیجه بگیرید که اگر $p = q = \frac{۱}{۲}$ آن گاه $e(j) = j(۲N - j + ۱)$ و برای $p \neq q$, $e(j)$ رابه دست آورید.

6- یک فرآیند گام برداری تصادفی ساده با وضعیتهای جاذب صفر و N را در نظر بگیرید.جسم متحرک با احتمال α یک گام به چپ با احتمال β درمکان خود باقی می ماند و با احتمال γ یک گام به راست بر می دارد. به قسمی که ($\alpha>0$ و $\beta>0$ و $\gamma>0$ و $\alpha+\beta+\gamma=1$)

الف- نشان دهید :

$$P[j \text{ جذب به } N \text{ با شروع از مکان}] = \begin{cases} \dfrac{(\frac{q}{p})^{j}-1}{(\frac{q}{p})^{N}-1}, & p \neq q \\ \\ \dfrac{j}{N} & p=q=\frac{1}{2} \end{cases}$$

که در آن $p=1-q=\dfrac{\gamma}{\alpha+\gamma}$ و $j=0,1,2,\ldots,N$.

ب-میانگین تعداد گام های جسم متحرک قبل از جذب به یکی از وضعیتهای جاذب را به دست آورید.

7- نمودار زیر حجره‌هایی را نشـان می‌دهد که بطور خطی با یکدیگر مرتبط هسـتند، موشـی که در یکی از این حجره‌ها قرار دارد به دنبال پیدا کردن غذاست که در حجره شماره 5 قرار دارد.

۱	۲	۳	۴	۵
شوک		موش		غذا

الف- اگر موش در حجره‌ای که قرار دارد با احتمال مســاوی به حجره مجاور برود، احتمال اینکه قبل از گرفتن شوک به غذا برسد چقدر است؟

ب- اگر موش با احتمال $p>\frac{1}{2}$ به حجره سمت را ست و با احتمال $q<\frac{1}{2}$ به حجره سمت چپ برود، احتمال اینکه قبل از گرفتن شوک به غذا برسد چقدر است؟

8- فرآیند گام‌برداری تصادفی ساده روی خط حقیقی با وضعیت جاذب صفر را در نظر بگیرید. یعنی $p+q=1$ و $P_{00}=1$ و $P_{ii-1}=q, \forall i\geq 1$ و $P_{ii+1}=p$ اگر f_{i0} احتمال بازگشت به صفر برای اولین بار با شروع از مکان i باشد، آنگاه نشان دهید:

$$\begin{cases} f_{i0}=pf_{i+1\,0}+qf_{i-1\,0}, i>1 \\ f_{10}=pf_{20}+q \end{cases}$$

با حل معادله تفاضلی فوق $f_{i.}, i\geq 1$ را محاسبه نمایید.