یک خانواده از متغیرهای تصادفی $\{X(t), t\in T\}$ را یک فرآیند تصادفی با فضای پارامتر T نامند؛ یعنی ، برای هر $t\in T$, $X(t)$ یک متغیر تصادفی است که اغلب آن را با نماد X_t نشان می دهند. متغیر t اغلب زمان در نظر گرفته می شود. به عنوان مثال، $X(t)$ ممکن است مقدار موجودی انبار یک خرده فروش را در زمان t ، یا تعداد افراد را در یک بانک در زمان t و یا موقعیت یک ذره متحرک را در زمان t نشان دهد، مجموعه T را مجموعه اندیس گذار یا فضای پارامتر فرآیند X_t و مجموعه کلیه مقادیر X_t را فضای وضعیت آن نامند.

مثالهای زیر نشان می دهند که فرآیندهای تصادفی بر اساس فضای پارامتر و فضای وضعیت خودشان به چهار دسته مهم تقسیم می شوند.

مثال۱: فرض کنید $\{X_n, n\geq ۱\}$ دنباله ای ازمتغیر های مستقل برنولی باشد؛ **در این صورت** $S_n=\sum_{h=۱}^{n} X_i$ یک فرآیند تصادفی با فضای پارامتر N و فضای وضعیت $\{0,1,2,3,......\}$است .

مثال۲: فرض کنید $N(t)$ تعداد مشتریان یک بانک تا زمان t باشد، در این صورت $\{N(t), t\in T\}$ یک فرآیند با فضای پارامترپیوسته است $T=R^+$ و فضای وضعیت گسسته Z^+ است .

مثال۳: فرض کنید X_t سرعت یک اتومبیل در زمان t باشد. در این صورت $\{X_t\ , t\geq ۰\}$ یک فرآیند با فضای پارامتر $T=R^+$وفضای وضعیت R^+است.

مثال ۴ :فرض کنید $X(t)$ ماکزیمم دمای اعلان شده توسط ایستگاه هواشناسی در زمان t یا میزان بارنده گی یک ناحیه در زمان t باشد . فضای پارامتر پیوسته و برابر R^+ ، فضای وضعیت نیز پیوسته و برابر R^+ است.

مثال ۵: اگر X_i طول عمر i امین کالای انتخاب شده در یک خط تولید باشد آنگاه $\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i, n\geq 1\right\}$ یک فرآیند تصادفی با فضای وضعیت پیوسته و فضای پارامتر گسسته است.

با توجه به مثالهای بیان شده چهار دسته مهم از فرآیندهای تصادفی بر حسب فضای پارامتر و فضای وضعیت عبارتند از:

۱- فرآیند تصادفی با فضای پارامتر گسسته و فضای وضعیت گسسته

۲- فرآیند تصادفی با فضای پارامتر گسسته و فضای وضعیت پیوسته

۳- فرآیند تصادفی با فضای پارامتر پیوسته و فضای وضعیت گسسته

۴- فرآیند تصادفی با فضای پارامتر پیوسته و فضای وضعیت پیوسته

مشخصه های یک فرآیند تصادفی:

فرض کنید $\{X(t), t \in T\}$ یک فرآیند تصادفی باشد در این صورت مشخصه های این فرآیند عبارتند از:

الف - تابع توزیع: $x \in R \qquad F_t(x) = P[X(t) \le x]$

ب - تابع توزیع توام: برای تمام مقادیر $t_1, t_2, \dots, t_n$ از T

$$\underset{\sim}{t} = (t_1, \dots, t_n) \quad \text{و} \quad F_t(x_1, \dots, x_n) = P[X(t_1) \le x_1, \dots X(t_n) \le x_n]$$

ج- تابع میانگین: $m(t) = E(X(t)) \quad , \forall t \in T$

د- تابع واریانس : $Var(X(t)) = \sigma^2(t), \ \forall t \in T$

ذ- تابع کواریانس (اتوکواریانس) : $C(t,s) = Cov(X(t), X(s)) \quad , \forall t,s \in T$

که در آن $\forall t \in T \quad C(t,t) = Var(X(t))$ و $C(t,s) = C(s,t) \qquad \forall s,t \in T$

ر- تابع همبستگی (خودهمبستگی) : برای هر s,t :

$$\rho(t,s) = \frac{C(t,s)}{\sqrt{C(t,t).C(s,s)}} = \frac{Cov[X(t), X(s)]}{\sqrt{Var[X(t)].Var[X(s)]}}$$

ویژگیهای فرآیندهای تصادفی:

در این بخش برخی از ویژگیهای مفید فرآیندهای تصادفی بیان می شود.

تعریف۲: فرآیند تصادفی $X(t)$ را اکیداً ایستا نامند اگر برای تمام مقادیر $t_1, t_2, \dots t_n \in T$ و $n \ge 1$ توزیع بردار تصادفی $(X(t_1), X(t_2), \dots X(t_n))$ تحت انتقال زمان پایا باشد. یعنی، برای هر مقدار h بردار تصادفی $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ هم توزیع با بردار تصادفی $(X(t_1+h), \dots, X(t_n+h))$ باشد.

مثال ۶ : اگر $\{X_n, n \ge 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع باشد آن گاه اکیداً ایستا است.

لم۱ : اگر $\{X(t), t \in T\}$ یک فرآیندااکیداً ایستا باشد آنگاه:

الف- $E(X(t)) = \mu$ و $Var[X(t)] = \sigma^2$ ب- $C(t,s)$ تابعی از $|t-s|$ است.

اثبات : از این که $\{X(t)\}$ اکیداً ایستا است داریم :

الف - $F_t(x) = P[X(t) \le x] = F_{t+h}(x) = P[X(t+h) \le x] \quad , \forall t,h$

بنابراین: $E[X(t+h)] = E[X(t)]$ و $E(X^2(t)) = E[X^2(t+h)]$

در نتیجه: $E(X(t)) = \mu \quad , \quad Var(X(t)) = \sigma^2$ یعنی هر دوثابت و مستقل از زمان هستند.

ب- فرض کنید $n = 2$ و $h, t_2, t_1 \in T$ در این صورت:

$$F_{t_1, t_2}(x, y) = F_{t_1+h, t_2+h}(x, y)$$

هرگاه $0<s<t$ و $t_1=0$, $t_2=t-s$, $h=s$ آنگاه:

$$F_{0,t-s}(x,y)=F_{s,t}(x,y)$$

با استدلالی مشابه برای هر $0<t<s$ داریم:

$$F_{t,s}(x,y)=F_{s-t,0}(x,y)$$

یعنی تابع توزیع توأم $F_{t_1,t_2}(x,y)$ از طریق $|t_2-t_1|$ به t_2,t_1 وابسته است بنابراین برای هر t و s،

$$E(X(t).X(s))=\iint xy\ f_{t,s}(x,y)dxdy$$
$$=\iint x.y\ f_{0,|t-s|}(x,y)dxdy=E[X(|t-s|).X(0)]$$

بنابراین: $C(t,s)=Cov(X(t),X(s))=Cov(X(0),X(|s-t|))$

بویژه برای هر t و τ، $C(t,t+\tau)=C(0,\tau)=C(\tau)$

تعریف۳: فرآیند $\{X(t),t\in T\}$ را ایستای ضعیف (ایستای کواریانس) نامند. اگر :

الف – برای هر مقدار t: $E[X(t)]=\mu<\infty$ و $Var(X(t))=\sigma^2<\infty$

ب – برای هر مقدار t $C(t,t+\tau)=C(\tau)=C(0,\tau)$

یعنی $C(t,s)$ تابعی از $|t-s|$ باشد.

مثال ۷: فرض کنید $\{X_n,n\geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل باشد. به طوری که

$$X_{2n}\sim U\{-1,1\}\quad , \quad X_{2n+1}\sim N(0,1)\quad n\geq 1$$

در این صورت بدیهی است که $\{X_n,n\geq 1\}$ اکیداً ایستا نیست ولی ایستای ضعیف است زیرا برای هر n، داریم :

$$E[X_n]=0\quad ،\quad Var(X_n)=1$$

و
$$C(n,m)=\begin{cases}1 & n-m=0\\ 0 & n-m\neq 0\end{cases}$$

تعریف ۴: نمو فرآیند تصادفی $\{X(t),t\in T\}$ روی فاصله $[t_1,t_2]$ عبارت است از $X(t_2)-X(t_1)$.در برخی موارد تفاضل $X(t+\tau)-X(t)$: به عنوان نمو بکار برده می شود $(t,t+\tau\in T)$. نمو یک فرآیند تصادفی ممکن است منفی یا مثبت باشد.

تعریف ۵: فرآیند تصادفی $\{X(t),t\in T\}$ را همگن یا دارای نموهای ایستا گوییم اگر برای ثابتهای دلخواه t_1,t_2 و هر τ طوری که $t_1+\tau,t_2+\tau\in T$ نموهای $X(t_2+\tau)-X(t_1+\tau)$ هم توزیع باشند به عبارت دیگر فرآیند $\{X(t),t\in T\}$ را همگن یا دارای نموهای ایستا نامند اگر برای هر $\tau,t\in T$ توزیع $X(t+\tau)-X(t)$ به t بستگی نداشته باشد.(که در آن τ ثابت است و $t,t+\tau\in T$)

تعریف ۶: فرآیند تصادفی $\{X(t),t\in T\}$ را با نموهای مستقل گوییم اگر برای مقادیر $t_i\in T$ طوری که $0<t_1<t_2\ldots<t_n$ متغیرهای تصادفی $X(t_2)-X(t_1),X(t_3)-X(t_2),\ \ldots\ ,X(t_n)-X(t_{n-1})$ مستقل باشند.

مثال ۷: اگر $\{X(t),t\in T\}$ یک فرآیند تصادفی با نموهای مستقل و $X(0)=0$ آنگاه:

$$Cov[X(t),X(s)]=Var[X(\min\{t,s\})] \quad t,s\in T$$

حل: اگر $0<t<s$ آن گاه :

$$Cov[X(t),X(s)]=Cov[X(t),X(s)-X(t)+X(t)]$$
$$=Cov[X(t),X(s)-X(t)]+Cov[X(t),X(t)]=Var(X(t))$$

اگر $0<s<t$ آن گاه بطور مشابه داریم،

$$Cov[X(t),X(s)]=Var(X(s))$$

درنتیجه برای هر: s,t

$$Cov(X(t),X(s))=Var[X(\min\{t,s\})]$$

تعریف ۷: فرآیند تصادفی $\{X(t),t\in T\}$ را یک فرآیند گاوسی نامند اگر برای تمام مقادیر $n\ge 1$ $t_1,t_2,...,t_n\in T$. توزیع بردار تصادفی $\{X(t_1),X(t_2),...,X(t_n)\}$ نرمال n متغیره باشد. یعنی

$$X(t)=(X(t_1),X(t_2),...X(t_n))\sim N_n(\mu,\Sigma)$$

که در آن

$$\sum=Var(X(t)) \text{ و } \mu=(EX(t_1),...,EX(t_n))$$

قضیه ۱: اگر $\{X(t),t\in T\}$ یک فرآیند گاوسی باشد آن گاه:

ایستای ضعیف $\Leftrightarrow$ ایستای اکید

تعریف ۸: فرآیند تصادفی $\{X(t),t\in T\}$ را یک فرآیند مارکوف نامند ، اگربرای تمام مقادیر $t_1,t_2,...,t_n,t_{n+1}\in T$ طوری که $(t_1<t_2...<t_{n+1})$ و $A_i\subseteq Z$ $(i=1,2,...,n+1)$ آنگاه

$$P\left[X(t_{n+1})\in A_{n+1}\middle|X(t_1)\in A_1,X(t_2)\in A_2,...,X(t_n)\in A_n\right]=P\left[X(t_{n+1})\in A_{n+1}\middle|X(t_n)\in A_n\right]$$

اگر $T=Z^+$ و فضای وضعیت زیر مجموعه ای از Z باشد آنگاه فرآیند مارکوفی $\{X(t),t\in T\}$ با نماد $\{X_n,n\ge 0\}$ نشان داده می شود و آن را یک زنجیرمارکوف نامند.در این حالت $p_{ij}=[X_{n+1}=j\,|\,X_n=i]$ را احتمال تغییر وضعیت از مکان i به j نامند. این احتمالات در شرایط اساسی زیر صدق می کنند.

الف- برای هر i,j ، $p_{ij}\ge 0$ ب- برای هر i، $\sum_{j\in S}p_{ij}=1$

این فرآیندهای تصادفی با جزئیات کامل در فصل ۵ معرفی و بررسی خواهد شد.

لم ۲: اگر $\{X_n,n\ge 1\}$ یک فرآیند تصادفی با نمو های مستقل با شد آن گاه دارای خاصیت مارکوفی است.

برهان:

$$
\begin{aligned}
&P[X_{n+1}=j \mid X_0=i_0, X_1=i_1, \ldots, X_{n-1}=i_{n-1}, X_n=i] \\
&=\frac{P[X_0=i_0, X_1=i_1, \ldots, X_n=i, X_{n+1}=j]}{P[X_0=i_0, X_1=i_1, \ldots, X_n=i]} \\
&=\frac{P[X_0=i_0, X_1-X_0=i_1-i_0, \ldots, X_n-X_{n-1}=i-i_{n-1}, X_{n+1}-X_n=j-i]}{P[X_0=i_0, X_1-X_0=i_1-i_0, \ldots, X_n-X_{n-1}=i-i_{n-1}]} \\
&=P[X_{n+1}-X_n=j-i]=P[X_{n+1}=j \mid X_n=i]
\end{aligned}
$$

که در آن تساوی سوم و چهارم به دلیل ویژگی با نمو های مستقل برقرار است

قضیه ۲: یک فرآیند مارکوف $X(t)$ اکیداً ایستا است اگر و فقط اگر تابع توزیع یک بعدی آن مستقل از زمان باشد، یعنی

$$F_t(x)=P[X(t)\le x]=F(x)\ ,\ \forall t\in T$$

تعریف ۹ : فرآیند $\{X(t), t\in T\}$ را پیوسته در میانگین مرتبه دو در نقطه t_0 نامند اگر $\lim\limits_{h\to 0} E\left[X(t_0+h)-X(t_0)\right]^2=0$. وآن را پیوسته روی $T_0\subset T$ نامند اگر در هر نقطه $t_0\in T_0$ پیوسته باشد.

قضیه۳ : فرآیند $\{X(t), t\in T\}$ در t_0 پیوسته در میانگین مرتبه دو است اگر و فقط اگر تابع کواریانس آن در $(s,t)=(t_0,t_0)$ پیوسته باشد.

نتیجه۱: اگر $\{X(t), t\in T\}$ یک فرآیند ایستای ضعیف باشد آن گاه پیوسته در میانگین مرتبه دو است اگر و فقط اگر تابع کواریانس آن در صفر پیوسته باشد.

در مثالهای زیر چند فرآیند تصادفی ساده که بیشتر در علوم مهندسی کاربرد دارد ، ارایه می شود. ایستایی این فرآیندها را بررسی کنید.

مثال ۸ : فرض کنید $X(t)=tU+V$ که در آن V,U متغیرهای تصادفی با میانگین و واریانس متناهی هستند, توابع میانگین, واریانس و کواریانس فرآیند $\{X(t), t\in T\}$ را بیابید. این فرآیند را فرآیند تصادفی با مسیر نمونه ای خطی نامند.

حل:

$$
\begin{aligned}
&m(t)=E(X(t))=tEU+EV \\
&\sigma^2(t)=Var\left[X(t)\right]=t^2Var(U)+Var(V)+2tCov(U,V)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Cov\left[X(t), X(s)\right]&=Cov\left[Ut+V, Us+V\right] \\
&=stVar(U)+tCov(U,V)+sCov(V,U)+Var(V)
\end{aligned}
$$

این فرآیندایستا نیست .

فرآیندهای برنولی و دو جمله ای

فرآیندهای برنولی و دوجمله به عنوان فرآیندهای تصادفی ساده با فضای پارامتر و فضای وضعیت گسسته در این بخش معرفی و برخی از ویژگیهای مفید آنها بیان می شود.

تعریف ۱۰: فرآیند تصادفی $\{X_n, n\ge 1\}$ را یک فرآیند برنولی نامند اگر:

الف- دنباله متغیرهای تصادفی $\{X_n, n \geq 1\}$ تواماً مستقل باشند.

ب- $P[X_n = 1] = p \quad , P[X_n = 0] = q = 1 - p$

مثال ۹: هر گاه در بازرسی یک خط تولید از نظر کنترل کیفیت $X_n = 1$ اگر nامین کالا معیوب و $X_n = 0$ اگر n امین کالا سالم و نسبت کالای معیوب تولید شده فرآیند p باشد،آن گاه پس از تحت کنترل بودن فرآیند شرط استقلال برای کالاهای انتخاب شده برقرار است. لذا $\{X_n, n \geq 1\}$ یک فرآیند برنولی با نسبت p می شود.

مثال ۱۰: هرگاه در یک تقاطع ۸۰ درصد اتومبیلها مستقل از هم به یک سمت بپیچند و $X_n = 1$ اگر n امین اتومبیل به سمت چپ بپیچد و $X_n = 0$ درغیر این صورت، آن گاه $\{X_n, n \geq 1\}$ یک فرآیند برنولی است.

لم۲: اگر $\{X_n, n \geq 1\}$ یک فرآیند برنولی با نسبت p باشد آن گاه:

الف- $E(X_n^{\ k}) = p$ ب- $Var(X_n^{\ k}) = pq$

تعریف ۱۱: اگر $\{X_n, n \geq 1\}$ یک فرآیند برنولی با نسبت p باشد و $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ n \geq 1$ آن گاه فرآیند $\{S_n, n \geq 1\}$ را یک فرآیند دوجمله ای نامند که در آن $E(S_n) = np$ و $Var(S_n) = npq$. علاوه بر این $\{S_n, n \geq 1\}$ یک فرآیند تصادفی با فضای وضعیت گسسته و فضای پارامتر گسسته است.

برخی ویژگیهای فرآیند $\{S_n, n \geq 1\}$

الف - به ازای هر m, n $\quad S_{n+m} - S_n = \sum_{i=n+1}^{n+m} X_i \sim B(m, p)$

بنابراین به طور کلی $S_{n+m} - S_n \overset{D}{\equiv} S_{n+m} - S_n | S_1, S_2, \ldots, S_n$ زیرا $S_{n+m} - S_n$ از $S_1, S_2 \ldots S_n$ مستقل است.

ب - $P[S_n = k] = p.P[S_{n-1} = k - 1] + q.P[S_{n-1} = k]$

زیرا برای هر $n \geq 1$ داریم $[S_n = k] \equiv [S_{n-1} = k - 1, X_n = 1] \cup [S_{n-1} = k, X_n = 0]$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
P[S_n = k] &= P[S_{n-1} = k - 1, X_n = 1] + P[S_{n-1} = k, X_n = 0] \\
&= P[X_n = 1]P[S_{n-1} = k - 1] + P[X_n = 0]P[S_{n-1} = k] \\
&= p.P[S_{n-1} = k - 1] + q.P[S_{n-1} = k]
\end{aligned}$$

ج - فرآیند $\{S_n, n \geq 1\}$ با نموهای مستقل است زیرا برای مقادیر $n_0 < n_1 < n_2, \ldots < n_k$ متغیرهای تصادفی $S_{n_1}, S_{n_2} - S_{n_1}, S_{n_3} - S_{n_2}, \ldots, S_{n_k} - S_{n_{k-1}}$ مستقل از هم هستند.

د- فرآیند $\{S_n, n \geq 1\}$ ایستای ضعیف نیست.

ذ- فرآیند $\{S_n, n \geq 1\}$ یک زنجیر مارکوف است زیرا بنا به لم ۲

$$P[S_{n+1}=j|S_1=i,\ldots S_n=i]=P[S_{n+1}=j|S_n=i]=\begin{cases}P[X_{n+1}=0]=q & j=i\\ P[X_{n+1}=1]=p & j=i+1\end{cases}$$

مثال ۱۰ : مطلوبست محاسبه مقادیر زیر:

الف- $P[S_5=4,S_7=5,S_{12}=8]$ 　 ب- $E[S_7.S_9]$ 　 ج- $E[S_{12}|S_7]$

حل: الف - بنا به ویژگی با نمو مستقل فرآیند $\{S_n\}$ داریم:

$$[S_5=4,S_7=5,S_{12}=8]\equiv[S_5=4,S_7-S_5=1,S_{12}-S_7=3]$$

در نتیجه:

$$P[S_5=4,S_7=5,S_{12}=8]=P[S_5=4]P[S_7-S_5=1]P[S_{12}-S_7=3]$$
$$=\binom{5}{4}P^4q^{5-4}\times\binom{2}{1}pq\times\binom{5}{3}p^3q^2$$

ب- روش اول :

$$E(S_7\times S_9)=E(S_7(S_9-S_7+S_7))=E(S_7(S_9-S_7))+E(S_7^2)$$
$$=E(S_7)E(S_9-S_7)+E(S_7^2)=7p\times 2p+7pq+(7p)^2$$

روش دوم:

$$E(S_7(S_7+\sum_{i=8}^{9}X_i))=E(S_7^2)+E(S_7.\sum_{i=8}^{9}X_i)$$
$$=E(S_7^2)+E(S_7).E(\sum_{i=8}^{9}X_i)$$

ج-

$$E(S_7+\sum_{i=8}^{12}X_i|S_7)=E(S_7|S_7)+E\left[\sum_{i=8}^{12}X_i\middle|S_7\right]$$
$$=S_7+E(\sum_{i=8}^{12}X_i)=S_7+5p$$

به طور کلی برای هر $n\geq m$ داریم: $E[S_n|S_m]=S_m+(n-m)p$

فرآیند زمانهای رخداد موفقیت ها:

یک نوع دیگر از فرآیندهای تصادفی با فضای پارامتر و فضای وضعیت گسسته؛ فرآیند تصادفی زمانهای رخداد موفقیت است که در این بخش معرفی و برخی از ویژگیهای آن بیان می شود.

تعریف ۱۲: هرگاه $\{X_n,n\geq 1\}$ یک فرآیند برنولی با احتمال موفقیت p باشد و T_kتعداد آزمایشهای لازم برای کسب kامین موفقیت باشد آن گاه $\{T_k,k\geq 1\}$ را فرآیند تصادفی زمان رخداد موفقیتها نامند. در این صورت فضای وضعیت و فضای پارامتر گسسته و برابر N است .

مثال ۱۱: اگر $X_1=0, X_2=1, X_3=0, X_4=0, X_5=1, X_6=1, X_7=0, X_8=1, X_9=0, X_{10}=1$

آن گاه $T_1=2\ ,\ T_2=5\ ,\ T_3=6\ ,\ T_4=8\ ,\ T_5=10$

برخی ویژگیهای فرآیند $\{T_k, k\ge 1\}$:

الف – از اینکه برای تمام مقادیر داریم $T_k\le n \Leftrightarrow S_n\ge k$ نتیجه می شود.

$$F_{T_K}(n)=P[T_k\le n]=P[S_n\ge k]=\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}p^j q^{n-j}$$

ب – از اینکه $X_n=1$ و $T_k=n\Leftrightarrow S_{n-1}=k-1$ نتیجه می شود:

$$P[T_k=n]=P[S_{n-1}=k-1]\times P[X_n=1]=\binom{n-1}{k-1}p^k q^{n-k}\quad , n=k,k+1,...$$

در نتیجه متغیرهای تصادفی T_K دارای توزیع دوجمله ای منفی هستند.

ج- از معادل بودن پیشامدهای $[T_{k+1}=n\,|\,T_k=m]$ ، $[T_{k+1}=n\,|\,T_1=j_1,....,T_{k-1}=j_{k-1},T_k=m]$ نتیجه می شود:

$$P[T_{k+1}=n\,|\,T_1=j_1,...,T_{k-1}=j_{k-1},T_k=m]=P\ [T_{k+1}=n\,|\,T_k=m]$$
$$=\begin{cases}0, & m\ge n\\ pq^{n-m-1}, & m<n\end{cases}$$

د – برای هر $m\ge 1$

$$P\left[T_{k+1}-T_k=m\middle|T_0,T_1,...,T_k\right]=P[T_{k+1}-T_k=m]=pq^{m-1},\qquad k\ge 1$$

زیرا برای هر $k\ge 1$ متغیر تصادفی $T_{k+1}-T_k$ مستقل از متغیرهای تصادفی $T_0,T_1,...,T_k$ **است.**

ذ - فرآیند $\{T_{k+1}-T_k, k\ge 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع هندسی است.یعنی برای هر $k\ge 1$ $T_{k+1}-T_k\xrightarrow{iid}G(p)$.

علاوه بر این با استفاده از ویژگیهای بیان شده نتایج زیر در مورد این فرآیند تصادفی برقرار هستند:

نتایج :

الف- فرآیند تصادفی $\{T_k, k\ge 1\}$ با نموهای مستقل است. یعنی به ازای مقادیر $k_1<k_2,...<k_m$ متغیرهای تصادفی $T_{k_m}-T_{k_{m-1}},...,T_{k_3}-T_{k_2},T_{k_2}-T_{k_1},T_{k_1}$ مستقل از هم هستند.

ب- فرآیند تصادفی $\{T_k, k\ge 1\}$ دارای خاصیت مارکوفی است

ج – د- فرآیند $\{T_k, k\ge 1\}$ یک فرآیند تصادفی با نموهای همگن است. یعنی برای هر n و m متغیرهای $T_{n+m}-T_m$ و T_n هم توزیع هستند .

ذ- برای هر $k\ge 1$: $T_k=\sum_{i=1}^{k}X_i$ که در آن $X_i\sim G(p)$

مثال۱۲: مطلوب است محاسبه $Var(T_k), E(T_k)$

حل: از این که $T_j - T_{j-1}$ متغیرهای مستقل هندسی با پارامتر p هستند داریم:

$$E(T_k) = \sum_{j=1}^{k} E(T_j - T_{j-1}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p} = \frac{k}{p}$$

$$Var(T_k) = Var(\sum_{j=1}^{k}(T_j - T_{j-1}) = \sum_{j=1}^{k} Var(T_j - T_{j-1})$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p}(\frac{1}{p} - 1) = \frac{k}{p}(\frac{1}{p} - 1)$$

مثال۱۳: مطلوب است محاسبه $P[T_1 = 3, T_5 = 9, T_7 = 17]$

حل:

$$P[T_1 = 3, T_5 = 9, T_7 = 17] = P[T_1 = 3, T_5 - T_1 = 6, T_7 - T_5 = 8]$$
$$P[T_1 = 3].P[T_5 - T_1 = 6]P[T_7 - T_5 = 8] = P[T_1 = 3].P[T_4 = 6].P[T_2 = 8]$$

مثال ۱۴ : مطلوب است محاسبه $E[T_7 | T_5]$

$$E[T_7 | T_5] = E[T_5 + T_7 - T_5 | T_5] = E[T_5 | T_5] + E[T_7 - T_5 | T_5]$$
$$= T_5 + E[T_7 - T_5] = T_5 + \frac{2}{p}$$

به طور کلی برای هر $n \geq m$ داریم :

$$E[T_n | T_m] = T_m + \frac{n-m}{p}$$

مثال۱۵ : احتمال این که راننده ای به اشاره مسافری که کنار خیابان منتظر ایستاده است توقف کرده ، او را سوار کند $p = 0/04$ است، البته رانندگان مختلف در تصمیم گیری به توقف یا عدم توقف عملکردی مستقل دارند. اگر مسافری متوجه شود که تاکنون ۳۰ اتومبیل از کنار او گذشته و متوقف نشده اند، احتمال این که بتواند سوار۳۷امین اتومبیل یا یکی از اتومبیلهای قبل از آن شود چه قدر است؟

حل : متغیر تصادفی T_1 تعداد اتومبیلهایی است که بایستی عبور کنند تا اولین مسافر سوار شود

$$P[T_1 \leq 37 | T_1 > 30] = 1 - P[T_1 > 37 | T_1 > 30]$$
$$= 1 - P[T_1 > 7] = 1 - (0/96)^7$$ (خاصیت بدون حافظگی)

تمرین:

۱- در تقاطع جاده ای حدود ۷۰ درصد اتومبیلها به طرف چپ جاده می پیچند. X_n را برابر ۱ یا ۰ تعریف می کنیم، بر حسب آنکه n امین اتومبیل به طرف چپ یا به طرف راست جاده بپیچد. اگر رانندگان اتومبیلها مستقل از یکدیگر در انتخاب مسیر خود تصمیم بگیرند هر یک از کمیتهای زیر را محاسبه کنید.

الف- $P[S_1=0, S_2=0, S_3=1, S_4=1]$ ب- $P[S_1=1, S_2=3, S_4=2]$ ج- $P[S_8=6, S_{15}=12]$

۲- قطر بلبرینگهای ساخته شده در یک خط تولید را اندازه گیری می کنند و آنهایی که مشخصات لازم را ندارند کنار می گذارند . فرض کنید $Y_n, n\geq 1$ قطر n امین بلبرینگ بر حسب اینچ باشد.

الف – امید ریاضی تعداد بلبرینگ هایی که در بین اولین ۴۰۰ بلبرینگ تولیدی شرایط مطلوب را ندارد چه قدر است؟

(فرض کنید کرانهای قابل قبول عبارتند از [۲/۹۹۴ و ۳/۰۰۶] و $(Y_n \sim N(3,\ 8\times 10^{-6}))$

ب- مطلوب است محاسبه مقادیر : $E(S_8 . S_{10})$ و $P[S_8=6, S_{10}=8]$.

(که در آن S_n تعداد بلبرینگ های نامطلوب در بین n انتخاب را نشان می دهد.)

ج- اگر T_k تعداد آزمایشهای لازم برای پیدا کردن k امین بلبرینگ نامطلوب باشد ، مطلوب است محاسبه مقادیر $P[T_1=3, T_5=9, T_7=15]$ و $E[T_6|T_3]$.

۳- محور زمان را به فواصلی به اندازه یک ثانیه تقسیم کنید.

اگر در طی ثانیه n ام اتومبیلی از این نقطه عبور کند قرار دهید $X_n=1$ در غیر این صورت $n\geq 1, X_n=0$. فرض کنید تعداد اتومبیلهایی که در فواصل زمانی جدا از هم از نقطه مفروض می گذرند مستقلند. T_k تعداد ثانیه های لازم برای عبور k امین وسیله نقلیه از آن نقطه و S_n تعداد وسایل نقلیه ای باشد که در بازه زمانی $[0,n]$ از نقطه ثابت عبور می کنند و نرخ عبور ۴ اتومبیل در هر دقیقه باشد. کمیتهای زیر را محاسبه نمایید.

الف- $P[X_n=1]$ ب- $P[T_4-T_3=12]$ ج- $E[T_{13}-T_3]$

د- $P[S_{10}=7, S_{30}=20]$ و $Var(3S_{10}+2S_{20})$ ذ- $Var[T_2+5T_3]$

۴--فرض کنید $\{X_n \quad , \quad n\geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل برنولی با احتمال موفقیت p باشد.

اگر $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$ و $p_n=P[S_n=2k, k=0,1,2,\dots]$ آنگاه

الف-ثابت کنید برای هر $p_n=p(1-p_{n-1})+qp_{n-1}, n\geq 1$ و $p_0=1$ $(p+q=1)$.

ب-با استفاده از تبدیل Z دنباله توابع احتمال $\{p_n, n\geq 1\}$ ثابت کنید

$$p_n = \frac{1}{2}[1+(q-p)^n], n = 0,1,2.....$$