فرآیند گام برداری تصادفی 98-99(2)

فرض کنید $\{Y_i\ ,\ i \geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل با تابع احتمال مشترک $P[Y_i = 1] = p$ و $P[Y_i = -1\ ] = q$, $(p+q=1)$باشد ، آنگاه $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ را یک فرآیند گام برداری تصادفی ساده روی محور حقیقی نامند. فرآیند گام برداری تصادفی کاربرد زیادی بویژه در فیزیک و نظریه شرط بندی دارد.

مثال 1 : حرکت یک ذره متحرک روی محور حقیقی را در نظر بگیرید که در هر زمان با احتمال p یک گام به راست و با احتمال q یک گام به چپ بر می دارد. اگرX_0 مکان اولیه ذره روی خط حقیقی باشد آنگاه $X_n + X_0$ مکان ذره پس از n جابجایی است.

مثال 2: یک بازی شرط بندی را در نظر بگیرید که در هر بازی بازنده یک تومان به برنده بدهد. هرگاه دو بازیکنA وB هر یک به ترتیب با سرمایه اولیه a و b شروع کنند و [برد A در هر بازی] p = P و [باخت A در هر بازی] q = P باشد آنگاه $X_n + a$ سرمایه بازیکن A پس از n دور بازی است.

بدیهی است که فرآیند گام برداری تصادفی ساده $\{X_n , n \geq 1\}$یک فرآیند تصادفی با فضای پارامتر گسسته ، Nو فضای وضعیت گسسته ، Z می باشد.

ویژگیها:

الف- با نمو های مستقل:

فرض کنید $n_1 < n_2 < \ldots\ldots < n_k$ در این صورت متغیرهای تصادفی $X_{n_1}, X_{n_2} - X_{n_1}, \ldots\ldots\ldots, X_{n_k} - X_{n_{k-1}}$ مستقل هستند بنابر این فرآیند تصادفی $\{X_n, n \geq 1\}$ مستقل است.

ب-نا ایستا یی: این فرآیند چون با نموهای مستقل است بنابر این ناایستا است.

ج-با نمو های همگن: چون برای هر $n,m \geq 1$ متغیرهای تصادفی X_n و $X_{n+m} - X_m$ همتوزیع هستند.

د- ویزگی مار کو فی: چون برای هر $i, j, i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} \in Z$ داریم:

$$
\begin{aligned}
&P[X_{n+1}=j \mid X_0=i_0, X_1=i_1,\ldots, X_{n-1}=i_{n-1}, X_n=i]\\
&\quad=\frac{P[X_0=i_0, X_1=i_1,\ldots, X_n=i, X_{n+1}=j]}{P[X_0=i_0, X_1=i_1,\ldots, X_n=i]}\\
&\quad=\frac{P[X_0=i_0, X_1-X_0=i_1-i_0,\ldots, X_n-X_{n-1}=i-i_{n-1}, X_{n+1}-X_n=j-i]}{P[X_0=i_0, X_1-X_0=i_1-i_0,\ldots, X_n-X_{n-1}=i-i_{n-1}]}\\
&\quad=P[X_{n+1}-X_n=j-i]=P[X_{n+1}=j \mid X_n=i]=\begin{cases} p, & j=i+1\\ q, & j=i-1\end{cases}
\end{aligned}
$$

که در آن تساوی سوم و چهارم به دلیل ویژگی با نمو های مستقل برقرار است

مثال3: در مثال 1 فرض کنید $X_0=0$ ، مطلوبست محاسبه هریک از احتمالات زیر :

$$P[X_3=-1] \quad \text{و} \quad P[X_3=1] \quad \text{و} \quad P[X_3=0],\ P[X_4=0]$$

حل : با رسم نمودار درختی حالتهای ممکن X_3, X_4 می توان احتمالات فوق را به صورت زیر محاسبه نمود

$$
\begin{aligned}
&P[X_3=0]=0,\ P[X_4=0]=6p^2q^2\\
&P[X_3=1]=p^2q+p^2q+p^2q=3p^2q\\
&P[X_3=-1]=pq^2+pq^2+pq^2=3pq^2
\end{aligned}
$$

تعریف ۱: فرآیند گام برداری تصادفی $\{X_n, n\geq 1\}$ را متقارن نامند اگر $p=q=\frac{1}{2}$ در غیر این صورت آن را نامتقارن نامند.

احتمالات انتقال

یک گام برداری تصادفی ساده با شروع از مکان $X_0=0$ را در نظر بگیرید. برای یک زمان داده شده n و مکان k، احتمال این که فرآیند در گام n در مکان k باشد یعنی $P[X_n=k]$ چقدر است؟

قضیه1 : اگر $u_n=P[X_n=X_0]$ ،احتمال این که جسم متحرک پس از n جابجایی به X_0 برگردد باشد ، آن گاه:

$$
u_n=\begin{cases} 0, & n=2m+1\\[2ex] \dbinom{2m}{m}p^m q^m, & n=2m\end{cases}
$$

برهان: با توجه به این که $P[Y_i=1]=p$ و $P[Y_i=-1]=q$ تعریف می کنیم

$$
B_i=\frac{1}{2}(Y_i+1)=\begin{cases} 1 & Y_i=1\\ 0 & Y_i=-1\end{cases}
$$

بنابراین: $B_i \sim Ber(p) \quad i=1,2,\ldots$ در نتیجه :

$$V_n = \sum_{i=۱}^{n} B_i = \frac{۱}{۲}\left(\sum_{i=۱}^{n} Y_i + n\right) \sim B(n,p)$$

یعنی: $V_n = \frac{۱}{۲}(X_n + n) \sim B(n,p)$ پس :

$$P\left[X_n = k \middle| X_۰ = ۰\right] = P\left[\frac{۱}{۲}(X_n+n) = \frac{n+k}{۲} \middle| X_۰ = ۰\right] = P\left[V_n = \frac{n+k}{۲} \middle| X_۰ = ۰\right]$$

$$= \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}} \qquad \frac{n+k}{2} = i \quad , \; i = 0,1,2,\ldots,n$$

درنتیجه اگر $k=۰$ و $n=۲m$ باشد آنگاه،

$$u_n = P[X_n = ۰ \mid X_۰ = ۰]$$
$$= P\left[V_n = \frac{n}{۲} \middle| X_۰ = ۰\right] = \binom{n}{\frac{n}{۲}} p^{\frac{n}{۲}} q^{\frac{n}{۲}} = \binom{۲m}{m} p^m q^m$$

و

$$P\left[X_{۲n+۱} = ۱ \middle| X_۰ = ۰\right] = P\left[V_{۲n+۱} = \frac{۲n+۱+۱}{۲} \middle| X_۰ = ۰\right]$$
$$= P\left[V_{۲n+۱} = n+۱ \middle| X_۰ = ۰\right] = \binom{۲n+۱}{n+۱} p^{n+۱} q^n$$

و درحالت کلی خواهیم داشت:

$$u_{۲n} = P[X_{۲n} = ۲j \mid X_۰ = ۰]$$
$$= P\left[V_n = n+j \middle| X_۰ = ۰\right] = \binom{۲n}{n+j} p^{n+j} q^{n-j}, \quad j = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots\ldots..$$

و

$$u_{۲n+۱} = P[X_{۲n+۱} = ۲j+۱ \mid X_۰ = ۰]$$
$$= P\left[V_n = n+j+۱ \middle| X_۰ = ۰\right] = \binom{۲n+۱}{n+j+۱} p^{n+j+۱} q^{n-j}, \quad j = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots\ldots..$$

گام برداری تصادفی روی بازه محدود $[0,\ c]$

فرآیند گام برداری تصادفی ۹۹-۹۸ (۲)

جسم متحرکی را در نظر بگیرید که روی بازه $[0, c]$ با احتمال p یک گام به راست و با احتمال q یک گام به چپ بر می دارد. اگر دنباله $\{Y_i, i \geq 1\}$ از متغیرهای تصادفی مستقل طوری باشد که:

$$P[Y_i = ۱] = p, P[Y_i = -۱] = q, p + q = ۱, X_۰ = ۰$$

آن‌گاه: $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ مکان جسم متحرک پس از n جابجایی است.

به عنوان مثال دیگر دو بازیکن B,A را در نظر بگیرید که A با سرمایه اولیه a تومان و B با سرمایه اولیه b تومان شروع به بازی می کنند. و بازنده در هر بازی یک تومان به برنده می دهد. اگر [برد A در هر بازی] p=P و [برد B در هر بازی] q=P آن گاه $X_n = a + \sum_{i=1}^{n} Y_i$ سرمایه A پس از n دور بازی است.

برای این فرآیند می خواهیم به دو سوال اساسی ذیل پاسخ دهیم. (C=a+b).

1- آیا جسم متحرک بالاخره به مرز خواهد رسید (آیا بازی B,A با ورشکستگی یک نفر به پایان خواهد رسید)؟

2- متوسط تعداد گامها برای رسیدن جسم متحرک به مرز چه قدر است (متوسط تعداد دورهای بازی برای ورشکستگی یک بازیکن چه قدر است.)؟

سؤال 1 را به دو مسأله تفکیک کرده و هریک را به طوری جداگانه حل می کنیم، از ترکیب دو مسأله، سؤال 1 حاصل می شود.

مساله 1.1: احتمال رسیدن جسم متحرک قبل از صفر به c چه قدر است (احتمال ورشکستگی B چه قدر است)؟

حل: تعریف می کنیم $\equiv E_j$ پیشامد آن که جسم متحرک با شروع از مکان j قبل از صفر به c برسد و

$j = ۱,۲,..., c-۱ \quad u_j = P[E_j]$ که در آن $u_0 = 0 \ , \ u_c = 1$

از قانون احتمال کل داریم:

$$\begin{aligned} u_j = P[E_j] &= P[E_j | Y = ۱] P[Y = ۱] + P[E_j | Y = -۱] P[Y = -۱] \\ &= P[E_j | Y = ۱] p + P[E_j | Y = -۱] q \end{aligned}$$

از طرفی : $[E_j | Y = 1] \equiv [E_{j+1}]$ و $[E_j | Y = -1] \equiv [E_{j-1}]$

در نتیجه: $u_j = P[E_{j+۱}] p + P[E_{j-۱}] q = p u_{j+۱} + q u_{j-۱}$

پس معادله تبدیل به یک معادله تفاضلی شد که بایستی حل شود،

$$\begin{cases} u_j = pu_{j+1} + qu_{j-1} \\ u_0 = 0 \quad u_c = 1 \end{cases}$$

برای حل این معادله تفاضلی از روش زیر استفاده می کنیم

$$(p+q)u_j = pu_{j+1} + qu_{j-1} \Rightarrow p(u_j - u_{j+1}) = q(u_{j-1} - u_j)$$

با تعریف $A_j = u_j - u_{j+1}$ و $r = \frac{q}{p}$ داریم:

$$pA_j = qA_{j-1} \Rightarrow A_j = \frac{q}{p} A_{j-1} = r.A_{j-1} \qquad , \quad j = 1,2,3,\dots,c-1$$

با حل این رابطه بازگشتی به دست می آوریم:

$$A_k = rA_{k-1} = r^2 A_{k-2} = r^3 A_{k-3} = \dots = r^k A_0$$

$$\begin{cases} A_k = r^k A_0 \\ A_0 = u_0 - u_1 = -u_1 \end{cases} \Rightarrow A_k = -u_1 r^k \quad , \quad k = 1,2,\dots,c-1$$

از طرفی داریم :

$$\sum_{k=0}^{j} A_k = (u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + \dots + (u_j - u_{j+1}) = u_0 - u_{j+1}$$

در نتیجه :

$$u_{j+1} = u_1 \times \sum_{n=0}^{j} r^k = \begin{cases} u_1 (j+1) & r = 1 \\ u_1 \dfrac{1 - r^{j+1}}{1 - r} & r \neq 1 \end{cases}$$

با تبدیل $j+1 \to j$ ، و استفاده از شرایط اولیه $u_c = 1$ داریم:

$$u_j = \begin{cases} \dfrac{j}{c} & r = 1 \\ \dfrac{1 - r^j}{1 - r^c} & r \neq 1 \end{cases} \qquad j = 0,1,2,\dots,c$$

بنابراین احتمال این که بازی در نهایت به نفع A تمام شودعبارت است از

$$u_a = \begin{cases} \dfrac{a}{a+b} & p = q = \frac{1}{2} \\ \dfrac{1 - r^a}{1 - r^{a+b}} & p \neq q \end{cases}$$

مساله 2.1: احتمال این که جسم متحرک قبل از c به صفربرسد، چه قدر است؟

فرآیند گام برداری تصادفی ۹۹-۹۸ (۲)

(تمرین)

$$v_j = P[F_j] = \begin{cases} \dfrac{c-j}{c} & r = 1 \\ \dfrac{r^j - r^c}{1 - r^c} & r \neq 1 \end{cases} \qquad j = 0,1,2,\ldots,c$$

شرایط اولیه $v_c = 0, v_0 = 1$ که در آن

$F_j \equiv$ پیشامد آن که جسم متحرک با شروع از مکان j قبل از c به صفر برسد.

سؤال 1: احتمال این که جسم متحرک با شروع از مکان j بالاخره به مرز برسد چه قدر است ؟

حل : از مسائل 1.1 و 2.1 داریم :

P [جسم متحرک با شروع از مکان j بالاخره به مرز برسد] $= u_j + v_j = 1$

یعنی احتمال رخ دادن پیشامدهای $1,-1,1,-1,\ldots$ و $-1,1,-1,1,\ldots$ صفر می باشد زیرا در صورت وقوع یکی از این دو پیشامد جسم متحرک هیچگاه به مرز نخواهد رسید.

سؤال 2 : متوسط تعداد گامها برای رسیدن جسم متحرک به نقاط مرز با شروع از مکان j چه قدر است؟

حل : تعریف می کنیم:

$T_j \equiv$ تعداد گامها برای رسیدن جسم متحرک به نقاط مرزی با شروع از مکان j و $e_j = E(T_j)$، داریم : $T_0 = T_c = 0$.

اکنون با استفاده از تکنیک شرطی کردن به دست می آوریم.

$e_j = E(T_j) = E(E(T_j|Y))$ که در آن $P[Y=1] = p$ و $P[Y=-1] = q$ در نتیجه

$$\begin{aligned} e_j &= E(T_j) = EE(T_j|Y) = pE[T_j|Y=1] + qE[T_j|Y=-1] \\ &= pe_{j+1} + qe_{j-1} + 1 \quad , \quad j = 1,\ldots,c-1 \end{aligned}$$

زیرا :

$$\begin{cases} T_j|Y=1 \equiv T_{j+1} + 1 \Rightarrow E[T_{j+1}|Y=1] = e_{j+1} + 1 \\ T_j|Y=-1 \equiv T_{j-1} + 1 \Rightarrow E[T_j|Y=-1] = e_{j-1} + 1 \end{cases}$$

عدد ثابت 1 در روابط فوق همان واحد زمان لازم جهت برداشتن یک قدم برای رفتن از j به $j+1$ یا $j-1$ است.درنتیجه:

$$\begin{cases} e_j = pe_{j+1} + qe_{j-1} + 1 & , \quad j = 1,2,\ldots,c-1 \\ e_0 = e_c = 0 \end{cases} , \qquad (A)$$

حال اگر $p = q = \frac{1}{2}$ به دست می آوریم $e_j = j(c-j) \quad , \quad j = 0,1,2,\ldots,c$ و اگر $p \neq q$

$$e_j=\frac{c\left(1-r^j\right)}{(p-q)\left(1-r^c\right)}+\frac{j}{q-p}\qquad , \quad j=0,1,2,\dots,c$$

نتیجه : اگر $p=q=\frac{1}{2}$ آن گاه متوسط تعداد دورهای بازی برای خاتمه بازی برابر است با $e_a=a(c-a)=a.b$

خلاصه: هرگاه $r=\frac{q}{p}$ و $j=0,1,2,\dots,c$ داریم :

$$u_j=\begin{cases}\dfrac{j}{c} & r=1\\[2mm] \dfrac{1-r^j}{1-r^c} & r\neq 1\end{cases}\quad \text{و} \quad v_j=\begin{cases}\dfrac{c-j}{c} & r=1\\[2mm] \dfrac{r^j-r^c}{1-r^c} & r\neq 1\end{cases}$$

الف- اگر $p=q=\frac{1}{2}$ آن گاه: $e_j=j(c-j)$.

زیرا در این حالت از معادلات (A) نتیجه می شود. $e_j-e_{j+1}=e_{j-1}-e_j,\quad j=1,2,\dots,c-1.$

اکنون با تعریف $B_j=e_j-e_{j+1}$ داریم $B_j-B_{j-1}=2,\quad j=1,2,\dots,c-1$ در نتیجه

$$B_j-B_0=\sum_{i=1}^{j}(B_i-B_{i-1})=2j,\quad j=1,2,\dots,c-1$$

از اینکه $B_0=-e_1$ با جمع بندی روی معادله فوق معادله زیر بدست می آید

$$-e_{j+1}=\sum_{i=1}^{j}B_i=-(j+1)e_1+j(j+1)$$

با تبدیل $j+1\to j$ داریم $e_j=je_1-j(j-1),\ j=0,1,2,\dots,c$ چون $e_c=0$ بنا براین $e_1=c-1$ و درنتیجه

$$e_j=j\left(c-j\right),\quad j=0,1,2,\dots,c.$$

ب- اگر $p\neq q$ آن گاه $e_j=\frac{c(1-r^j)}{(p-q)(1-r^c)}+\frac{j}{q-p}$.

درحالت حدی وقتی $(c\to+\infty)$ داریم:

$$\lim_{c\to+\infty}u_j=\begin{cases}0 & r\geq 1\\ 1-r^j & r<1\end{cases}\quad \text{و}\quad \lim_{c\to\infty}v_j=\begin{cases}1 & r\geq 1\\ r^j & r<1\end{cases}\quad \text{و}$$

اگر $r\leq 1$ آن گاه: $\lim_{c\to+\infty}e_j=+\infty$ و اگر $r>1$ آن گاه: $\lim_{c\to\infty}e_j=\frac{j}{q-p}$ ،

در نتیجه اگر $p\leq q$ آن گاه بازیکن A در برابر رقیب ثروتمند خود مجبور به شکست است (با احتمال 1 شکست می خورد)

اگر q<p (توانایی A بیشتر از B باشد) شانس A برای برنده شدن نهایی $1-r^a$ است.

فرآیند گام برداری بازگشتی و گذرا

گام برداری تصادفی ساده با شروع از مبدأ $X_0=0$ را در نظر بگیرید. در حرکت یک جسم متحرک روی محور حقیقی، متحرک ممکن است به مبدأ برگردد یا برنگردد. اگر گام برداری روی یک بازه محدود باشد آن گاه متحرک با احتمال 1 به مبدأ برمی گردد. این فرآیند گام برداری تصادفی را بازگشتی و در غیر این صورت گذرا نامند. خواهیم دید که یک گام بردار تصادفی ساده برگشت پذیر است اگر و تنها اگر متقارن باشد $\left(p=q=\frac{1}{2}\right)$. یک دلیل شهودی ساده عبارتست از :

موقعیت ذره متحرک در لحظه n یعنی $X_n=\sum_{i=1}^{n}Y_i$ مجموع n متغیر تصادفی مستقل و هم توزیع با $E(Y)=p-q$ و واریانس متناهی است ، در نتیجه بنا به قانون اعداد بزرگ درمیانگین مربع $n\to\infty \ ,\ \frac{X_n}{n}\to p-q$.

علاوه بر این همگرایی در میانگین مربع به ساده گی از رابطه زیر نیز بدست می آید.

$$E[\frac{X_n}{n}-(p-q)]^2=Var\left(\frac{X_n}{n}\right)=\frac{4pq}{n}\to 0,\ \ n\to\infty$$

در نتیجه:

$$\frac{X_n}{n}\xrightarrow{L^2}p-q,\quad n\to\infty$$

بنابراین اگر $p>q$ آن گاه جسم متحرک به سمت $+\infty$ جلو می رود و اگر $p<q$، به سمت $-\infty$ میل می کند. اگر $p=q$ آن گاه در میانگین مربع $\frac{X_n}{n}\to 0$ یعنی متحرک به مبدأ بر می گردد .

قضیه 2: هرگاه $\{X_n,n\geq 1\}$ یک فرآیند گام برداری تصادفی ساده باشد.

آن گاه:

$$P\left[\bigcup_{n=2}^{+\infty}\left(X_n=0,X_k\neq 0,1\leq k\leq n-1\right)|X_0=0\right]=1-|p-q|$$

اثبات: پیشامدهای A_n و B_n را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$A_n=[X_n=0]\equiv$ پیشامد آن که فرآیند پس از n جابجایی به مبدأ بازگردد.

$B_n=\{X_n=0,X_k\neq 0,1\leq k\leq n-1\}\equiv$ پیشامد آن که فرآیند برای اولین بار در زمان n به مبدأ برگردد.

$$A_n=\bigcup_{k=1}^{n}(A_n\cap B_k)\Rightarrow P(A_n)=P\left[\bigcup_{k=1}^{n}(A_n\cap B_k)\right]=\sum_{k=1}^{n}P(A_nB_k)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}P(B_k).P(A_n|B_k)=\sum_{k=1}^{n}P(B_k).P(A_{n-k})$$

زیرا می دانیم اولین بار در گام kام به مبدأ برگشته و مجدداً پس از n-k گام دیگر به مبدأ بر می گردد. یعنی $A_n|B_k\equiv A_{n-k}$

اکنون با تعریف $u_n = P(A_n)$ و $f_n = P(B_n)$ داریم $u_n = \sum_{k=1}^{n} f_k u_{n-k}$، بدیهی است $u_0 = 1$ و $f_0 = 0$. هرگاه $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ و $U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k$ به ترتیب تبدیلات z، دنباله های $\{f_n\}$ و $\{u_n\}$ باشند آن گاه با ضرب طرفین رابطه $u_n = \sum_{k=1}^{n} f_k u_{n-k}$ در z^n و جمع بستن روی n داریم؛

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k u_{n-k} z^n$$

از طرفی:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k z^k u_{n-k} z^{n-k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=k}^{+\infty} u_{n-k} z^{n-k}\right) f_k z^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (U(z)).\, f_k z^k = U(z)\sum_{k=1}^{\infty} f_k z^k = U(z).F(z)$$

در نتیجه:

$$U(z) - 1 = U(z).F(z) \Rightarrow F(z) = 1 - \frac{1}{U(z)}$$

در قضیه 1.2.3 ثابت کردیم

$$u_n = \begin{cases} o & n = 2m+1 \\ \binom{2m}{m} p^m q^m & n = 2m \end{cases}$$

در نتیجه بنا به قضایای 5 و 6 پیوست.

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = \sum_{m=0}^{\infty} u_{2m} z^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2m}{m} (pq)^m z^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2m}{m} (pqz^2)^m$$

$$= (1 - 4pqz^2)^{\frac{-1}{2}}$$

بنابراین :

$$F(z) = 1 - \frac{1}{(1 - 4pqz^2)^{-\frac{1}{2}}} = 1 - (1 - 4pqz^2)^{\frac{1}{2}}$$

وبنا به لم آبل پیوست داریم :

$$P\left[\bigcup_{n=2}^{+\infty}\left(X_n = 0, X_k \neq 0, 1 \le k \le n-1\right) \middle| X_0 = 0\right] = P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \lim_{z\to 1}\sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n$$

$$= \lim_{z\to 1}(1 - (1 - 4pqz^2)^{\frac{1}{2}}) = 1 - (1 - 4pq)^{\frac{1}{2}} = 1 - |p - q|$$

در نتیجه :

$$P\left[\bigcup_{n=2}^{+\infty}\left(X_n=0, X_k\neq 0, 1\leq k\leq n-1\right)\middle| X_0=0\right]=1-|p-q|$$

نتیجه 1: اگر $q=p=\frac{1}{2}$ آن گاه:

$$P\left[\bigcup_{n=2}^{+\infty}\left(X_n=0, X_k\neq 0, 1\leq k\leq n-1\right)\middle| X_0=0\right]=1$$

یعنی فرآیند گام برداری تصادفی متقارن با احتمال یک به مبدأ برمی‌گردد.

لم 1[5]: هرگاه $\{X_n, n\geq 1\}$ یک فرآیند گام برداری تصادفی متقارن و $T=\min\{n\geq 1: X_n=0\}$ (یعنی زمان اولین بازگشت به مبدأ)آن گاه: $P[T<\infty]=1$

نتیجه.2: در یک فرآیند گام برداری تصادفی متقارن داریم $E(T)=\infty$ (متوسط تعداد گامها برای این که به مبدأ برگردد بی نهایت می شود)

برهان : بنا به قضیه 2 و لم آبل پیوست داریم :

$$E(T)=\sum_{n=1}^{\infty}nf_n=\lim_{z\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}nf_n z^{n-1}=\lim_{z\to 1}F'(z)$$

زیرا: $$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n z^n\Rightarrow F'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nf_n z^{n-1}$$

از طرفی داریم $F(z)=1-(1-4pqz^2)^{\frac{1}{2}}$ بنابراین $F'(z)=\frac{4pqz}{\sqrt{1-4pqz^2}}$

در نتیجه اگر: $p=q=\frac{1}{2}$ آن گاه $E(T)=\lim_{z\to 1^-}F'(z)=\lim_{z\to 1^-}\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}=\infty$

یعنی اگر چه فرآیند گام برداری تصادفی متقارن با احتمال یک به مبدأ بر می گردد، ولی متوسط تعداد گامهای لازم برای بازگشت نامتناهی است.