این بخش شامل معرفی یک تبدیل مفید برای متغیرهای تصادفی و ارائه برخی کاربردها از جمله توزیع مجموع و مجموع تعدا تصادفی متغیرهای تصادفی مستقل می باشد. علاوه براین کاربرد این تبدیل در تحلیل مسایل مربوط به فرآیند پواسون و فرآیندهای زاد و مرگ در بخشهای دیگر بیان خواهد شد.

فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی با مقادیر $\{0,1,2,...\}$ و دنباله توزیع احتمال $k=0,1,2,...$ و $p_k = P[X=k]$ باشد تبدیل z متغیرهای تصادفی X که با نماد $M_X(z)$ نشان می دهند عبارت است از:

$$M_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P[X=k] z^k = E(z^X)$$

ویژگیهای $M_X(z)$

الف – $M_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ ب – اگر $|z| \le 1$ آن گاه $|M_X(z)| \le 1$.

ج - $\left.\dfrac{d^K M_X(z)}{d_z k}\right|_{z=1} = E\big(X(X-1)(X-2)...(X-k+1)\big) \quad k \ge 1$

مثال ۱ : اگر X دارای توزیع پواسون با پارامتر λ باشد، $(X \sim P(\lambda))$.آن گاه:

$$P[X=k] = p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \qquad k=0,1,2,...$$

$$M_X(z) = E(z)^X = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k z^k}{k!} = \exp[\lambda(z-1)]$$

مثال۲: اگر X دارای توزیع هندسی با احتمال موفقیت p باشد. $(X \sim G(p))$ آن گاه :

$$p_k = P[X=k] = pq^{k-1} \qquad , k=1,2,...$$

$$M_X(z) = E(z^X) = p\sum_{K=1}^{\infty} q^{K-1} z^K = p\frac{z}{1-qz} = \frac{pz}{1-qz}$$

مثال۳: اگر X دارای توزیع دو جمله ای منفی با پارامترهای r و احتمال موفقیت p باشد. $(X \sim NB(r,p))$ آن گاه از اینکه

$$1 = p^r(1-q)^{-r} = p^r \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-r}{j} (-q)^j = p^r \sum_{j=0}^{\infty} \binom{r+j-1}{j} (-1)^j (-q)^j$$

$$= p^r \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k-1}{k-r} (q)^{k-r} = p^r \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k-1}{r-1} (q)^{k-r}$$

$$M(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k-1}{r-1} p^r (q)^{k-r} z^k = \frac{(pz)^r}{(1-qz)^r}$$

توزیع مجموع متغیرهای تصادفی

اگر به اطراف خودمان توجه کنیم همواره با نمونه هایی از مجموع متغیرهای تصادفی مواجه می شویم . برای مثال، وزن کل یک محموله از اقلام کالا را می توان به صورت مجموع وزنهای اقلام انفرادی بیان کرد . هزینه کل یک وسیله خانگی را می توان به صورت مجموع هزینه های مؤلفه هایی که محصول تکمیل شده را تشکیل می دهند بیان کرد. تعیین توزیع مجموع متغیرهای تصادفی مستقل به کمک تبدیل z از اهداف این بخش است.

مثال۴: در یک جامعه دانشجویی درآمدها، متغیر تصادفی با میانگین μ و انحراف معیار σدر هر ماه است. اگر n دانشجو به تصادف از این جامعه انتخاب شوند، آن گاه میانگین و انحراف معیار درآمد ماهیانه کل این دانشجویان مورد توجه است.

مثال ۵: فرض کنید طول عمر یک نوع لامپ روشنایی متغیر تصادفی نمایی با میانگین ۹۰۰ ساعت باشد، ۴۰۰ لامپ از این نوع خریداری شده است. میانگین طول عمر این ۴۰۰ لامپ و توزیع عمر کل آنها یک مسأله آماری مورد توجه است.

قضایای زیر ابزاری کلیدی برای اهداف این بخش می باشد.

قضیه۱ : اگر X و Yدو متغیرتصادفی نامنفی با مقادیر صحیح و مستقل از هم باشند آن گاه

$$M_{X+Y}(z)=M_X(z).M_Y(z)$$

قضیه۲ (یکتایی) توزیعهای احتمال یکسان دارای تبدیلهای Z یکسان هستند:

$$M_X(z)=M_Y(z)\Leftrightarrow F_X(t)=F_Y(t)$$

قضیه۳: اگر $X_n,\cdots,X_2,X_1$ متغیرهای تصادفی مستقل از هم با مقادیر صحیح مثبت باشند آن گاه:

$$M_{S_n}(z)=\prod_{i=1}^{n}M_{X_i}(z)$$

که در آن $S_n=\sum_{i=۱}^{n}X_i$. بویژه اگر متغیرهای تصادفی فوق هم توزیع باشند.آن گاه:

$$M_{S_n}(z)=(M_{X_i}(z))^n$$

قضیه ۴: اگر X یک متغیر تصادفی نامنفی با مقادیر صحیح باشد، آن گاه

$$p_k=P[X=k]=\frac{1}{k!}\frac{d^{(k)}M_X(z)}{d_z^k}\Big|_{z=0}=\frac{1}{k!}M_x^{(k)}(0)\ ,\quad \forall k\geq 0$$

برهان: از اینکه $M_X(z)=\sum_{j=۰}^{\infty}p_jz^j$ نتیجه می شود

$$\frac{d^kM_X(z)}{d_z^k}=\sum_{j=۰}^{\infty}j(j-۱)(j-۲)...(j-k+۱)p_jz^{j-k}$$
$$=\sum_{j=k}^{\infty}j(j-۱)....(j-k+۱)p_jz^{j-k}$$

زیرا تا جمله $j=k-1$ تمامی جملات صفر خواهد بود، بنابراین داریم:

$$\frac{d^{(k)}M_X(z)}{d_z^k}\Big|_{z=0}=\sum_{j=k}^{\infty}\binom{j}{k}k!\,p_j z^{j-k}\Big|_{z=0}=k!\,p_K$$

در نتیجه : $p_k=\frac{1}{k!}\frac{d^k M_X(z)}{d_z^k}\Big|_{z=0}=\frac{M^{(k)}(0)}{k!}$

توزیع مجموع تصادفی از متغیرهای تصادفی

در این بخش مجموع هایی از متغیرهای تصادفی را- که تعداد جملات آنها نیز تصادفی است- در نظر می گیریم. چنین مجموع هایی در بسیاری زمینه های کاربردی مورد نیاز هستند.

مثال۶: تعداد تصادفات خودروها در یک بزرگراه از توزیع پواسون با میانگین دوتصادف در روز پیروی می کند، اگر X_i هزینه ای باشد که تصادف iام متحمل شود، در این صورت هزینه کل، میانگین و انحراف معیار آن در ماه یک مسأله مهم مورد علاقه است.

مثال۷: تعداد اقلام کالاهای معیوب تولیدی کارخانه ای از توزیع پواسون با میانگین $\lambda=10$ قلم در ساعت پیروی می کند، هزینه تعمیر هر قلم کالای معیوب، متغیری تصادفی با میانگین هشتاد هزار تومان و انحراف معیار دو هزار تومان است. کل هزینه اقلام معیوب تعمیری در یک دوره ۲۴ ساعته مورد توجه است.

قضیه۷: فرض کنید $\{X_n, n\geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با مقادیر صحیح مثبت و N یک متغیر تصادفی نا منفی با مقادیر صحیح و مستقل از X_i ها باشد. آن گاه: $M_{S_N}(z)=M_N(M_{X_i}(z))$

که در آن $S_N=\sum_{i=1}^{N}X_i$ ، $M_N(z)=E(z^N)$ و $M_{X_1}(z)=E(z^{X_1})$

اثبات : با استفاده از تعریف امید ریاضی شرطی مکرر و استقلال و هم توزیع بودن داریم:

$$M_{S_N}(z)=E(z^{S_N})=E(E(z^{S_N}|N))$$

برای هر مقدار n داریم :

$$E(z^{S_N}|N=n)=E(z^{S_n}|N=n)=E(z^{S_n})=(M_{X_1}(z))^n$$

بنابراین: $E(z^{S_N}|N)=[M_{X_1}(z)]^N$

در نتیجه: $M_{S_N}(z)=E(M_{X_1}(z))^N=M_N(M_{X_1}(z))$

رابطه تبدیل z با تابع مولد گشتاور

$$\begin{cases}M_X(z)=E(z^X)\\ \varphi_X(t)=E(e^{tX})\end{cases}\Rightarrow \varphi_X(t)=M_X(e^t)$$

مثال۸: فرض کنید $N\sim P(\lambda)$ و $X_i\sim ber(p)$ و مستقل از هم و N مستقل از X_iها باشد. اگر $S_N=\sum_{i=1}^{N}X_i$ نشان دهید:

$$Cov(N,S_N)=\lambda p$$

حل : طبق تعریف داریم :

$$Cov(N,S_N)=E(N.S_N)-E(N).E(S_N)$$

$$ES_N=EN.EX_1=\lambda p$$

و:

$$E(N.S_N)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} j.kP[N=j,S_N=k]$$

از طرفی داریم:

$$P[N=j,S_N=k]=P[S_N=k|N=j]P[N=j]$$

$$=P[S_j=k]P[N=j]=\binom{j}{k}p^k q^{j-k}.\frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}$$

در نتیجه با جایگزینی، به دست می آوریم:

$$E(N.S_N)=p(\lambda+\lambda^2)$$

بنابراین:

$$Cov(N,S_N)=p(\lambda+\lambda^2)-p\lambda^2=p\lambda$$

مثال۹ :تعداد پرندگان مهاجر از ناحیه ای به ناحیه دیگر از توزیع پواسون با نرخ λ پیروی می کند. هر پرنده در مسیرخود با احتمال p تلف می شود. مطلوب است تعیین میانگین و انحراف معیار تعداد کل پرندگان تلف شده در مسیر مهاجرت.

حل : با تعریف $X_i=1$ اگر iامین پرنده تلف شود و $X_i=0$ اگر iامین پرنده تلف نشود. تعداد کل پرندگان تلف شده در مسیربرابر است با $S_N=\sum_{i=1}^{N}X_i$ ، بنابراین کافیست ES_N و $Var(S_N)$ را محاسبه نماییم، که بنا به قضیه ۱.۳.۱ به سادگی قابل محاسبه هستند.

تبدیل لاپلاس یک متغیر تصادفی

اگر X یک متغیر تصادفی نامنفی با تابع توزیع $F(x)$ و تابع چگالی $f(x)$ باشد آن‌گاه تبدیل لاپلاس استیلجس متغیر تصادفی X یا تابع توزیع $F(x)$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$f_X^*(s)=\int_0^{+\infty}e^{-sx}dF(x) \qquad \text{یا} \qquad f_X^*(s)=\int_0^{+\infty}e^{-sx}f(x)dx=E(e^{-sX}),\ s>0$$

نکته: به ساده گیمشاهده می شود که: $f_X^*(s)=M_X(e^{-s}),\ s>0.$

ویژگیهای تبدیل لاپلاس متغیر تصادفی X

الف - $f_X^*(0)=1$، $\quad \frac{df_X^*(s)}{ds}\Big|_{s=0}=E\left[-Xe^{-sX}\right]_{s=0}=-E(X),$

ب - $\frac{d^2f_X^*(s)}{ds^2}\Big|_{s=0}=E\left[X^2e^{-sX}\right]_{s=0}=-E(X^2)$

ج - برای هر $k\geq 1$ $\quad E(X^k)=(-1)^k\frac{d^{(k)}f_X^*(s)}{ds^k}\Big|_{s=0}$

قضیه ۸ :اگر Y,X دو متغیر تصادفی پیوسته نامنفی و مستقل باشند آن گاه:

$$f^*_{X+Y}(s) = f^*_X(s) \times f^*_Y(s)$$

برهان : $f^*_{X+Y}(s) = E(e^{-s(X+Y)}) = E(e^{-sX}).E(e^{-sY}) = f^*_X(s).f^*_Y(s)$

قضیه ۹: هرگاه $X_1, X_2, ..., X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل ، پیوسته و نامنفی باشند آن گاه: $f^*_{S_n}(s) = \prod_{i=1}^{n} f^*_{X_i}(s)$

که در آن $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

بویژه اگرمتغیرهای تصادفی هم توزیع نیزباشندآن گاه: $f^*_{S_n}(s) = \left[f^*_{X_1}(s)\right]^n$

قضیه۱۰: توزیعهای متمایز دارای تبدیلهای لاپلاس متمایز هستند.

$$f^*_X(s) = f^*_y(s) \quad \Leftrightarrow \quad F_X(t) = F_Y(t) \quad , \quad \forall t \in R$$

مثال ۱۰ : هرگاه $i = 1,2,...,n, X_i \sim \exp(\lambda)$ و مستقل از یکدیگر باشند نشان دهید: $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n,\lambda)$

حل : اگر $X \sim \exp(\lambda)$ آن گاه : $f^*_X(s) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-(\lambda+s)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda+s}$

یعنی هر متغیر تصادفی که تبدیل لاپلاس آن به صورت $\frac{\lambda}{\lambda+s}$ باشد توزیع آن حتماً نمایی است.

می دانیم اگر $X \sim \Gamma(n,\lambda)$ آن گاه $f^*_X(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$. از طرفی داریم $f^*_{S_n}(s) = \left[f^*_{X_1}(s)\right]^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$

بنابراین $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n,\lambda)$.

قضیه ۱۰ : فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل ،نامنفی وهم توزیع با تبدیل لاپلاس مشترک $f^*_{X_1}(s)$ باشند و N یک متغیر تصادفی گسسته نامنفی با تبدیل z, $M_N(z)$ و N مستقل از X_i ها باشد آن گاه:

$f^*_{S_N}(s) = M_N\left(f^*_{X_1}(s)\right)$ که در آن $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$

مثال۱۱: هرگاه $X_i \sim \exp(\lambda)$ و مستقل از هم و N یک متغیر تصادفی با مقادیر صحیح نامنفی مستقل از X_i ها و $N \sim G(p)$ نشان دهید $S_N \sim \exp(\lambda p)$.

حل : از اینکه : $f^*_{X_i}(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$ و $M_N(z) = E(z^N) = \frac{Pz}{1-qz}$

نتیجه می شود : $f^*_{S_N}(s) = M_N\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right) = \frac{p \times \frac{\lambda}{\lambda+s}}{1-q\frac{\lambda}{\lambda+s}} = \frac{p\lambda}{1+p\lambda} \Rightarrow S_N \sim \exp(\lambda p)$

تمرین:

۱- تعداد یک نوع گیاه در یک منطقه متغیر تصادفی N با تابع احتمال : $\lambda>0, q=\ln(1+\frac{1}{\lambda}), q(n)=\frac{\lambda q^n}{n!}, n=1,2,...$ است و تعداد بذرهای حاصل از هر یک از این گیاهان که به گل می نشیند یک متغیر تصادفی پواسون با نرخ λp است. میانگین و واریانس تعداد بذرها را تعیین کنید $(p+q=1)$.

۲- تعداد مشتریان یک فروشگاه بزرگ در هر روز متغیر تصادفی پواسون با نرخ λ است و مبلغی که iامین مشتری خرج می کند متغیر تصادفی نمایی با متوسط $\frac{1}{\mu}$ است. مطلوبست تعیین متوسط و واریانس کل فروش این فروشگاه در یک روز.

۳- تعداد اتومبیلهایی که در یک ساعت معین برای سوخت گیری به یک جایگاه بنزین مراجعه می کنند متغیر تصادفی پواسون با نرخ ۳۰ است . اگر مبالغ پرداختی توسط رانندگان متغیرهای تصادفی مستقل ومستقل از تعداد اتومبیلها با متوسط ۱۲۰۰ و واریانس ۱۰۰ باشند . میانگین و واریانس کل فروش این جایگاه در طول یک ساعت را تعین نمایید .

۴-فرض کنید $\{X_n, n\geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل برنولی با احتمال موفقیت p باشد. اگر $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$ و $p_n=P[S_n=2k], \quad k=0,1,2,...$ آنگاه

الف-ثابت کنید برای هر $p_n=p(1-p_{n-1})+qp_{n-1}, n\geq 1$ و $p_0=1$ $(p+q=1)$.

ب-با استفاده از تبدیل Z دنباله توابع احتمال $\{p_n, n\geq 1\}$ ثابت کنید $p_n=\frac{1}{2}[1+(q-p)^n], n\geq 0$

۵- تخم ریزی در حشرات یک متغیر تصادفی است به طوریکه تعداد تخمهی تولید شده هر حشره از توزیع با تابع احتمال زیر پیروی می کند. $p_n=P(N=n)=q.p^n, \quad n=0,1,2....., 0<p<1, \quad p+q=1$

اگر شانس تبدیل هر تخم به یک حشره جدید برابر α $(0<\alpha<1)$ باشد و $\beta=1-\alpha$. آنگاه نشان دهید تعداد کل حشرات در یک نسل از توزیعی با تابع احتمال زیر پیروی میکند.

$$h_k=\frac{q}{1-p\beta}\left(\frac{p\alpha}{1-p\beta}\right)^k, \quad k=0,1,2.....$$