

تکلیف ۱ :

۱- یک مخزن آب با ظرفیت کل a را در نظر بگیرید. در طول یک روز به اندازه ۲ واحد آب با احتمال $\frac{1}{3}$ وارد آن و به اندازه ۱ واحد با احتمال $\frac{2}{3}$ از آن خارج می شود. اگر این مخزن پر و یا تقریباً پر باشد آب اضافی از دست می رود. فرض کنید E_k پیشامد آن باشد که مخزن با شروع از ظرفیت k تخلیه شود و $u_k = P[E_k], k = 0, 1, 2, \dots, a$.
آنگاه:

الف- یک معادله تفاضلی برای u_k بیابید با توجه به شرایط اولیه سیستم جواب عمومی آن را بدست آورید.

ب- احتمال اینکه این مخزن سرانجام خالی شود با فرض اینکه در ابتدا ۱۲ واحد آب داشته را بدست آورید.

ج- نشان دهید این مخزن در نهایت خالی خواهد شد.

د- توزیع دهید چرا می توان شرایط مرزی را به صورت $u_a = u_{a-1}, u_a = u_{a-2}$ نیز در نظر گرفت؟

۲- در مسئله ورشکستگی فرض کنید سرمایه اولیه بازیکن A برابر a و بازیکن B برابر b باشد. اگر بازیکن A در هر بازی که برنده شود با احتمال $0/4$ دو واحد پول دریافت و اگر ببازد با احتمال $0/6$ یک واحد پول پرداخت نماید و فرض کنید E_j پیشامد آن باشد که بازیکن A با شروع از سرمایه j برنده نهایی باشد و $u_j = P[E_j], j = 1, 1, 2, \dots, c - 2$ آن گاه نشان دهید.

الف- $u_j = pu_{j+2} + qu_{j-1}, j = 1, 2, \dots, a - 2, u_0 = 0, u_c = 1, c = a + b$

ب- با حل معادله قسمت الف احتمال اینکه بنده نهایی بازیکن A باشد را بدست آورید.

ج- متوسط تعداد بازیها برای پایان یافتن بازی را بدست آورید.