فرآیند تصادفی پواسن

دکتر محمد امینی
دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه فردوسی مشهد

۱۳۹۶
دانشگاه فردوسی مشهد

تعاریف و ویژگیها

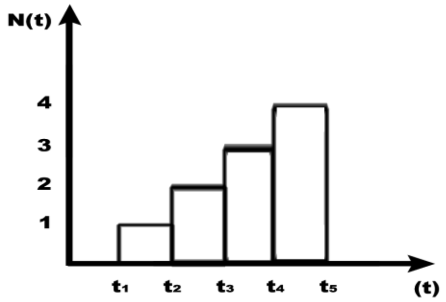
فرآیند پواسون کاربردهای بسیار زیادی دارد. از فرآیند پواسون بخصوص به عنوان مدل مراجعه به فروشگاهها، درخواست مکالمه تلفنی از طریق مرکز تلفن، تعداد ذرات رادیو اکتیو که به یک شمارشگر برخورد می کنند و نظایر اینها استفاده می شود. قبل از معرفی فرآیند پواسون یک مدل کلی تصادفی که برای توصیف چنین وقایعی استفاده می شود یعنی (فرآیند نقطه ای)را معرفی می نماییم.

تعریف۱: فرآیند تصادفی $\{N(t),t\geq 0\}$ با فضای وضعیت $\{0,1,2,......\}$ را یک فرآیند نقطه ای نامند اگر دارای ویژگیهای زیر باشد:

الف- اگر $t\leq s$ آنگاه $N(t)\leq N(s)$

ب- برای هر $t<s$, $N(s)-N(t)$ تعدادوقایع رخ داده دربازه $[t,s]$ باشد.

تعریف۲: یک فرآیند نقطه ای را ساده نامند اگر در هر زمان فقط یک واقعه رخ دهد.



مسیر نمونه ای فرآیند نقطه ای ساده $N(t)$ یک تابع پله ای غیرنزولی است.

تذکر: فرآیندهای نقطه ای ایستا نیستند.

تعریف ۳ : فرآیند نقطه ای $\{N(t),t\geq 0\}$ را همگن یا ایستا نامند اگر نموهای آن همگن باشند.

تعریف۴ : فرآیند نقطه ای $\{N(t),t\geq 0\}$ یک فرآیند پواسون همگن با نرخ $\lambda>0$ است. اگر دارای ویژگیهای زیر باشد.

الف- $N(0)=0$

ب- فرآیند $N(t)$ با نموهای مستقل باشد یعنی تعداد وقایع در بازه های زمانی

مجزا مستقل از هم باشند.

ج- نموهای فرآیند $N(t)$ در هر بازه (s,t) دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda(t-s)$ باشد. یعنی $k=۰,۱,۲,...$,

$$P[N(t)-N(s)=k]=\frac{e^{-\lambda(t-s)}(\lambda(t-s))^k}{k!}$$

یا به عبارتی دیگر برای هر $t,s>0$ ،

$$N(t+s)-N(t)\sim P(\lambda s)$$

قضیه۱: فرآیند نقطه ای $\{N(t),t\geq ۰\}$ با $N(۰)=۰$ یک فرآیند پواسون همگن با نرخ λ است. اگر و فقط اگر دارای ویژگیهای زیر باشد.

۱- فرآیند $\{N(t)\}$ با نموهای مستقل باشد.

۲- ساده باشد یعنی $P[N(t+\Delta t)-N(t)\geq ۲]=o(\Delta t)$

۳- داشته باشیم $P[N(t+\Delta t)-N(t)=۱]=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$

که در آن $\Delta t>۰$. یعنی شرایط ۱و۲و۳ برقرار هستند اگر و تنها اگر:

$$p_n(t)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!},\ \ n=0,1,2,....$$

در نتیجه :

$$N(t)\sim P(\lambda t)$$

قضیه ۲: اگر $N(t)\sim P(\lambda t)$ و T_n زمان وقوع n امین واقعه فرآیند پواسون $\{N(t),t\geq ۰\}$ باشد.آنگاه T_n دارای توزیع گاما باپارامترهای nو λاست .

برهان: کلید اثبات این قضیه گزاره دو شرطی زیر است :

$$T_n\leq t\Leftrightarrow N(t)\geq n$$

با استفاده از قضیه ۱ و گزاره فوق داریم :

$$F_{T_n}(t)=P[T_n\leq t]=P[N(t)\geq n]=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$$

در نتیجه :

$$f_{T_n}(t)=\frac{\partial F_{Tn}(t)}{\partial t}=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{-\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}+\sum_{k=n}^{\infty}k.\lambda\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{k-1}}{k!}$$

$$=\left(\frac{-\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}+\frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-۱}}{(n-۱)!}\right)+\left(\frac{-\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n+۱}}{(n+۱)!}+\frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}\right)+...$$

و از آنجا داریم : $$f_{T_n}(t)=\frac{\lambda^n t^{n-۱}e^{-\lambda t}}{(n-۱)!} \quad ,n\geq ۱ \ \ ,t\geq ۰$$

و این حکم را ثابت می کند. یعنی : $T_n \sim \Gamma(n,\lambda)$.

نتیجه ۱ اگر $n=1$ آن گاه $T_1 \sim \exp(\lambda)$ و علاوه بر این متغیرهای تصادفی $\{\ Y_i=T_i-T_{i-۱} \quad , \quad i\geq ۲\ \}$ مستقل از هم و با T_1هم توزیع هستند.

قضیه ۳: فرآیند نقطه ای $\{N(t),t\geq ۰\}$ با $N(۰)=۰$ یک فرآیند پواسون با نرخ λاست اگر و تنها اگر فواصل زمانی بین وقایع متوالی آن متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ باشند.

مثال۱ : تعداد اشتباهات $N(t)$ را که در یک شبکه کامپیوتری تا لحظه t رخ می دهد می توان توسط یک فرآیند پواسون تشریح نمود اگر به طور متوسط پس از هر ۴ ساعت یک اشتباه رخ می دهد.(در هر ساعت $\lambda=\frac{۱}{۴}$)

الف- احتمال رخ دادن حداکثر یک اشتباه در فاصله $[0,8]$ و لااقل دو اشتباه در فاصله $[۸,۱۶]$ و حداکثر یک اشتباه در فاصله $[۱۶,۲۴]$ چه قدر است؟

ب- احتمال این که سومین اشتباه پس از ۸ ساعت رخ دهد چه قدر است؟

حل :الف - $N(t)\equiv$ تعداد اشتباهات تا زمان t (در بازه ای به طول t) دارای فرآیند پواسون با نرخ $\frac{۱}{۴}$ است. از این که $N(t)$ با نموهای مستقل است داریم:

$$\begin{aligned}
&P[N(8)\leq 1, N(16)-N(8)\geq 2, N(24)-N(16)\leq 1]\\
&=P[N(۸)\leq ۱].P[N(۱۶)-N(۸)\geq ۲].P[N(۲۴)-N(۱۶)\leq ۱]\\
&=P[N(۸)\leq ۱].P[N(۱۶-۸)\geq ۲].P[N(۲۴-۱۶)\leq ۱]\\
&=(P[N(۸)\leq ۱])^{۲}.P[N(۸)\geq ۲]=۹e^{-۴}(۱-۳e^{-۲})
\end{aligned}$$

ب – از این که $T_3 \sim \Gamma(3,\ 0.25)$ داریم:

$$P[T_3\geq 8]=\int_8^{+\infty}\frac{t^2e^{-\frac{t}{4}}}{4^3\Gamma(3)}dt=\sum_{k=0}^{2}\frac{e^{-2}(2)^k}{k!}=5e^{-2}.$$

ویژگیهای فرآیند پواسون

۱- برآورد λ در توزیع پواسون

بنا به نامساوی چپیشف برای هر $a>0$ داریم:

$$P\left[\left|\frac{N(t)}{t}-\lambda\right|>a\right]\leq\frac{E\left[\frac{N(t)}{t}-\lambda\right]^{2}}{a^{2}}=\frac{Var(\frac{N(t)}{t})}{a^{2}}=\frac{\lambda}{a^{2}t}$$

هرگاه $t\to\infty$ سمت راست نا مساوی به سمت صفر میل می کند . بنابراین:

$$P\left[\left|\frac{N(t)}{t}-\lambda\right|>a\right]\to 0 \quad , \quad t\to\infty$$

در نتیجه برای مقادیر بزرگ t $\quad \hat{\lambda}=\frac{N(t)}{t}$

۲- مجموع فرآیندهای پواسون مستقل

قضیه ۴ : $(i=1,2,\dots,n), N_i(t)\sim P(\lambda_i t)$ و $N_i(t)$ ها مستقل از هم باشند. آنگاه:

$$N(t)=\sum_{i=1}^{n}N_i(t)\sim P(\sum_{i=1}^{u}\lambda_i t)$$

۳- تفاضل دو فرآیند پواسون مستقل

فرض کنید $N_1(t)\sim P(\lambda_1 t)$ و $N_2(t)\sim P(\lambda_2 t)$ و مستقل از هم باشند آن گاه : $N(t)=N_1(t)-N_2(t)$ فرآیند پواسون نیست.

زیرا :

$$Var(N(t))=(\lambda_1+\lambda_2)t \quad \text{و} \quad EN(t)=(\lambda_1-\lambda_2)t$$

۴- تابع خودهمبستگی فرآیند پواسون

قضیه۵ : اگر $N(t)\sim P(\lambda t)$ آنگاه برای هر t,s: $\quad \rho(N(t),N(s))=\frac{\min\{t,s\}}{\sqrt{t.s}}$

اثبات : برای هر t,s داریم

$$\rho(N(t),N(s))=\frac{Cov[N(t).N(s)]}{\sqrt{Var[N(t)].Var[N(s)]}}$$
$$=\frac{Cov[N(t),N(s)]}{\sqrt{\lambda^{2}.t.s}}=\frac{\lambda\min\{t,s\}}{\sqrt{\lambda^{2}.t.s}}=\frac{\min\{t,s\}}{\sqrt{t.s}}$$

نتیجه ۲: اگر شرایط قضیه ۵ برقرار باشد؛ آنگاه برای هر t و s

$$\rho[N(t),N(t+s)]=\left[\frac{t}{t+s}\right]^{\frac{1}{2}}$$

توزیع دو جمله ای و فرآیند پواسون

یکی از توزیع های مرتبط با توزیع پواسون توزیع دوجمله ای است؛ بر اساس این نتیجه معروف که توزیع شرطی یک متغیر تصادفی پواسون به شرط معلوم بودن مجموع دو متغیر تصادفی مستقل پواسون یک متغیر دوجمله ای است. انتظار می رود که در مورد فرآیند پواسون نیز این نتیجه برقرار باشد. در قضیه بعدی این نتیجه بیان و اثبات می شود.

قضیه۶ : اگر $N(t)\sim P(\lambda t)$، آن گاه برای هر t<s

$$N(t)\Big|N(s)=n\sim B\left(n,\frac{t}{s}\right)$$

مثال ۴: تعداد هواپیماهای خصوصی که از فرودگاه محلی پرواز می کنند از فرآیند پواسون با نرخ ۲۴ فروند در یک روز کاری هشت ساعتی پیروی می کند.

الف – احتمال این که بین پروازهای متوالی فاصله زمانی ۳۰ دقیقه ای یا کمتر باشد چه قدر است ؟

ب – اگر در یک روز کاری ۲۰ پرواز از این فرودگاه انجام شده باشداحتمال این که لااقل پنج تای آنها در دو ساعت اول روز انجام گرفته باشد چه قدر است ؟

حل : الف –

$$\equiv N(t) \sim P(3t)$$ تعداد پروازهای انجام شده در هر ساعت

چون فاصله زمانی بین وقایع متوالی پواسون متغیر تصادفی نمایی است پس

$T \sim \exp(3)$ (فاصله زمانی بین دو پرواز متوالی) ، بنابراین:

$$P\left[T \le \frac{1}{2}\right] = \int_0^{\frac{1}{2}} 3e^{-3x}dx = 1 - e^{-\frac{3}{2}}$$

ب – از اینکه به ازای هر $t < s$ داریم: $N(t)\big|N(s) = n \sim B(n, \frac{t}{s})$

نتیجه می شود: $N(2)\big|N(8) = 20 \sim B(20, \frac{1}{4})$

بنابراین: $P\left[N(2) \ge 5 \big| N(8) = 20\right] = \sum_{k=5}^{20} \binom{20}{k} (\frac{1}{4})^k (\frac{3}{4})^{20-k}$

مثال ۵: مشتریان یک فروشگاه بر اساس فرآیند پواسون با نرخ $\lambda = 2$ در هر دقیقه مراجعه می کنند اگر $N(t)$ تعداد مراجعه کنندگان تا لحظه t باشند، هر یک از احتمالات زیر را حساب کنید.

الف - $P\left[N(1) = 2\right]$ ب – $P\left[N(1) = 2 \ , N(3) = 6\right]$

حل : الف – $P\left[N(1) = 2\right] = \frac{e^{-2}2^2}{2!} = 2e^{-2}$

ب – از اینکه به ازای هر $t < s$: $N(t)\big|N(s) = n \sim B(n, \frac{t}{s})$ نتیجه می شود

$$P\left[N(1) = 2 \ , N(3) = 6\right] = P\left[N(3) = 6\right].P\left[N(1) = 2 \big| N(3) = 6\right] = \frac{e^{-6}6^6}{6!} \times \binom{6}{2} (\frac{1}{3})^2 \times (\frac{2}{3})^4$$

تفکیک فرآیند پواسون

در بخش قبل بررسی شد که مجموع فرآیندهای تصادفی پواسون مستقل یک فرآیند پواسون با نرخ مجموع نرخ ها می باشد. در این بخش شرایطی بیان می شود که یک فرآیند پواسون با نرخ معلوم قابل تجزیه به فرآیند های پواسون مستقل می باشد.

قضیه۷: فرض کنید $\{N(t), t \geq ۰\}$ فرآیند پواسون با نرخ λ باشد و وقایع فرآیند مستقل از هم با احتمال p گزارش شود. و با احتمال q گزارش نشود. $(p+q=1)$

در اینصورت اگر $M_۱(t) \equiv$ تعداد وقایع گزارش شده تا زمان t. و

$M_۲(t) \equiv$ تعداد وقایع گزارش نشده تا زمان t.

آنگاه: الف- $M_۱(t) \sim P(\lambda pt) \quad , \quad M_۲(t) \sim P(\lambda qt)$

ب- فرآیندهای $M_1(t),\ M_2(t)$ مستقل از هم هستند.

اثبات: الف- باستفاده از قانون احتمال کل داریم

$$\begin{aligned} P[M_۱(t)=n] &= \sum_{k=۰}^{\infty} P[M_۱(t)=n, N(t)=n+k] \\ &= \sum_{k=۰}^{\infty} P[N(t)=n+k].P[M_۱(t)=n \mid N(t)=n+k] \\ &= \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n+k}}{(n+k)!} \times \binom{n+k}{n} p^n q^k \end{aligned}$$

زیرا : $(M_1(t) \mid N(t)=n+k) \sim B(n+k, p)$

اگر (گزارش هر واقعه) $p=P$ و (عدم گزارش واقعه) $q=P$ آنگاه

$$\begin{cases} M_1(t) \mid N(t)=m \sim B(m, p) \\ M_2(t) \mid N(t)=m \sim B(m, q) \end{cases}$$

در نتیجه:

$$P\left(M_۱(t)=n\right)=\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}\left(\lambda tp\right)^n\left(\lambda tq\right)^k}{n!\,k!}=\frac{e^{-\lambda t}\left(\lambda tp\right)^n}{n!}\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{\left(\lambda tq\right)^k}{k!}$$

$$=\frac{e^{-\lambda t}\left(\lambda tp\right)^n}{n!}\times e^{\lambda tq}=\frac{e^{-\lambda tp}\left(\lambda tp\right)^n}{n!}\qquad ,n=۰,۱,۲,...$$

با استدلالی مشابه برای فرآیند $M_2(t)$ نیز ثابت می شود.

ب- برای هر $i,j\in\{0,1,2,3,......\}$ داریم

$$P[M_1(t)=i,M_2(y)=j]=P[M_1(t)=i,\ M_2(t)=j\,|\,N(t)=i+j].P[N(t)=i+j]$$

$$=P[M_1(t)=i,M_2(t)=j\,|\,N(t)\neq i+j].P[N(t)\neq i+j]$$

$$=\binom{i+j}{i}.p^i.q^j\,\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{i+j}}{(i+j)!}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda pt)}(\lambda pt)^i}{i!}.\frac{e^{-(\lambda pt)}(\lambda pt)^j}{j!}$$

$$=P[M_1(t)=i].P[M_2(t)=j].$$

مثال ۶: تعداد زمین لرزه ها در یک ناحیه از فرآیند پواسون با نرخ ۲ در سال پیروی می کند فرض کنید ۳۰٪ زمین لرزه ها دارای شدت بیش از ۵ ریشتر باشند.

الف-احتمال اینکه از ۵ زمین لرزه ای که در ۴سال آینده رخ خواهد داد، لااقل ۲تای آنها شدید باشند چقدر است؟

ب- احتمال این که اولین زمین لرزه ای که در این ناحیه رخ می دهد شدید باشد چه قدر است؟

ج- احتمال این که لااقل دردو سال از ۵ سال آینده زمین لرزه شدید رخ ندهد چه قدر است؟

حل: تعداد کل زمین لرزه ها تا لحظه t فرآیند پواسون با نرخ ۲ است .

$N_۱(t)\sim P(۲\times ۰/۳t)\equiv$ تعداد کل زمین لرزه های شدید تا لحظه t.

$N_۲(t)\sim P(۲\times ۰/۷t)\equiv$ تعداد کل زمین لرزه های ضعیف تا لحظه t.

الف :

$$P\left[N_۱(۴)\geq ۲\middle|N(۴)=۵\right]=\sum_{k=۲}^{۵}\binom{۵}{k}(۰/۳)^k(۰/۷)^{۵-k}$$

زیرا $\left[N_۱(۴)\middle|N(۴)=۵\right]\sim B(۵,۰/۳)$

ب:

$X \sim \exp(۰/۶) \rightarrow E(X) = \frac{۱}{۰/۶} = \frac{۱۰}{۶}$ فاصله زمانی بین هر دو زمین لرزه شدید

$Y \sim \exp(۱/۴) \rightarrow E(X) = \frac{۱}{۱/۴} = \frac{۱۰}{۱۴}$ فاصله زمانی بین هر دو زمین لرزه ضعیف

اولین زمین لرزه شدید خواهد بود . $\Leftrightarrow X < Y$

اولین زمین لرزه ضعیف خواهد بود . $\Leftrightarrow Y < X$

X,Y مستقل از هم هستند زیرا $N_۲(t), N_۱(t)$ مستقل از هم هستند. در نتیجه

$$P[X < Y] = \iint_{[x<y]} f(x,y)dxdy = \iint_{[x<y]} f(x).f(y)dxdy$$
$$= \iint_{[x<y]} 0/84 \ e^{-0/6x} e^{-1/4y} dxdy$$

فرآیند پواسون دوباره شروع شده

یک فرآیند پواسون؛ همواره از لحظه صفر شروع به فعالیت می کند؛ یعنی $N(0) = 0$ **یا** $N(0) = i, \ \ i \neq 0$.
در بسیاری از موارد این فرآیند از لحظه ثابت s یا زمان تصادفی T و یا زمان رخ دادن $k-$ امین واقعه شروع به فعالیت می کند. بررسی رفتار فرآیند پواسون با این شرایط نیز به دلیل کاربردهای خاص مورد توجه می باشد.

قضیه ۸: فرض کنید $N(t) \sim P(\lambda t)$ و $N(۰) = ۰$ در این صورت : $\{ X(t) = N(t+s) - N(s), s,t \geq 0 \}$ یک فرآیند پواسون با نرخ λ است.

قضیه ۹. اگر T یک متغیر تصادفی نامنفی و مستقل از $N(t)$ باشد. آنگاه $\{ X(t) = N(T+t) - N(T), t \geq 0 \}$ یک فرآیند پواسون با نرخ λ است.

قضیه ۱۰: اگر T_k زمان رخداد $k-$ امین واقعه باشد. آنگاه $\{ X(t) = N(T_k + t) - N(T_k), t \geq 0 \}$ یک فرآیند پواسون با نرخ λ است.

فرآیند پواسون و توزیع یکنواخت

قضیه زیرنشان می دهد که اگر $N(s)=۱$ آنگاه زمان تصادفی T_1 که اولین و تنها پیشامد پواسون در بازه $[0,s]$ رخ میدهد دارای توزیع یکنواخت روی بازه $[0,s]$ است. یعنی اگر تعداد رخدادها در یک بازه مشخص معلوم باشد آنگاه زمان رخدادها متغیر های تصادفی یکنواخت هستند.

قضیه ۱۱: اگر $N(t)\sim P(\lambda t)$ و $N(۰)=۰$ آن گاه برای هر $s>۰$ ،

$$T_۱|N(s)=۱\sim U(۰,s)$$

اثبات: برای هر $۰\le t<s$ داریم :

$$P[T_1>t|N(s)=1]=\frac{P[T_1>t,N(s)=1]}{P[N(s)=1]}$$

از طرفی $P[N(s)=۱]=\lambda s e^{-\lambda s}$ و $P[T_1>t\ ,N(s)=1]=P[N(s)=1|T_1>t]P[T_1>t]$ و

(چون در بازه $[0,s]$ تنها یک واقعه رخ داده‌است)

$$N(s)=1|\ T_1>t\Leftrightarrow N(s)-N(t)=1$$

بنابراین

$$P[T_۱>t\ ,N(s)=۱]=P[N(s)-N(t)=۱].e^{-\lambda t}$$
$$=P[N(s-t)=۱].e^{-\lambda t}=\lambda(s-t)e^{-\lambda(s-t)}.e^{-\lambda t}$$

در نتیجه

$$P[T_1>t|N(s)=1]=\frac{e^{-\lambda(s-t)}\lambda(s-t)e^{-\lambda t}}{\lambda s e^{-\lambda s}}=1-\frac{t}{s}$$

یعنی ،

$$T_۱|N(s)=۱\sim U(۰,s)\ .$$

فرآیند پواسون و توزیع هندسی

توزیعهای هندسی و نمایی از این نظر که تنها توزیعهایی هستند که دارای خاصیت بدون حافظگی اند یکتا می باشند، از طرفی در قضیه۲.۱.۴ ثابت کردیم که یک رابطه نزدیک بین فرآیند پواسون و توزیع نمایی وجود دارد. بنابراین بررسی رابطه بین فرآیند پواسون و توزیع هندسی مورد توجه است . قضیه زیر این ارتباط را بیان می کند.

قضیه۱۲: فرض کنید $N_1(t)$ و $N_2(t)$دو فرآیند پواسون مستقل از هم به ترتیب با نرخهای λ_1 و λ_2 باشند. متغیرهای تصادفی N_1و N_2 را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$N_1 \equiv$ تعداد وقایع فرآیند $N_1(t)$ که بین هر دو واقعه متوالی از $N_2(t)$ رخ می دهد.

$N_2 \equiv$ تعداد وقایع فرآیند $N_2(t)$ که بین هر دو واقعه متوالی از $N_1(t)$ رخ می دهد.

در این صورت ، الف - $N_1 \sim G(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2})$ ب - $N_2 \sim G(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})$

نتیجه ۳: اگر N_n تعداد وقایع فرآیند $N_1(t)$ بین دو واقعه $N_2(t)$ که در لحظات T_n, T_{n-1} رخ می دهند، باشد. آن گاه $\{N_n, n \geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل هندسی با پارامتر $\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$ هستند.

مثال۷ : هرگاه تعداد تصادفات ماهانه در یک بزرگراه از فرآیند پواسون با نرخ ۵ پیروی کند و۶۰ درصد این تصادفات کلی ومنجر به مرگ شونداحتمال این که:

الف- در ماه آینده بین دو تصادف کلی بیش از سه تصادف جزیی رخ دهد چه قدر است؟

ب- بین دو تصادف جزیی بیش از سه تصادف کلی رخ دهد چه قدر است؟

ج- بین اولین و سومین تصادف کلی بیش از ۵ تصادف جزیی رخ دهد چه قدر است؟

حل:

$N(t) \sim P(5t)$ تعداد کل تصادفات

$N_1(t) \sim P(3t)$ تعداد تصادفات کلی

$N_2(t) \sim P(2t)$ تعداد تصادفات جزیی

$N_1 \sim G(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}) \equiv G(\frac{2}{5}) \equiv G(0.4)$ $\equiv$ تعداد تصادفات کلی بین دو تصادف جزیی

$N_2 \sim G(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}) \equiv G(\frac{3}{5}) \equiv G(0.6)$ $\equiv$ تعداد تصادفات جزیی بین دوتصادف کلی

الف- $P[N_2 > 3]$ ب- $P[N_1 > 3]$ ج- به عنوان تمرین

فرآیند پواسون خوشه ای

در بخش۱ فرض کردیم که در هر لحظه تنها یک واقعه رخ دهد، حال فرض کنیم که در هر لحظه چندین واقعه بتوانند با هم رخ دهند، یعنی در هر لحظه زمانی تعدادی واقعه داشته باشیم، و می پذیریم که

الف – تعداد دسته ها در لحظه t فرآیند پواسون با نرخ λ است.

ب- هر دسته شامل تعداد تصادفی واقعه است، (یعنی تعداد وقایع iامین دسته یک متغیر تصادفی است). و تعداد وقایع در دسته های مختلف دوبه دو مستقل و از یک توزیع پیروی می کنند.

با توجه به کاربرد مهم فرآیند پواسون خوشه ای در مسایل مختلف بویژه در صفهای گروهی، نظریه مخاطره جمعی و ... وحل مسایل عملی بسیاری به کمک فرآیندپواسون خوشه ای دراین بخش به بررسی ویژگیهای این فرآیند می پردازیم .

تعریف۵ : فرض کنید $N(t)$ یک فرآیند شمارشی با $N(0)=0$ و غیرساده باشد یعنی وقایع آن به صورت گروهی رخ دهند.اگر X_i تعداد اعضای گروهی که در زمان T_i رخ می دهد باشدآن گاه تعداد کل وقایع تا زمان t یعنی $X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ را یک فرآیند پواسون خوشه ای یا مرکب می نامند.

نظریه زیان

تعداد تقاضاهای واصل شده به یک شرکت بیمه از فرآیند پواسون با نرخ λ پیروی می کند و میزان تقاضا ها متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع با توزیع معلوم $F(x)$هستند. در این صورت $X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$ میزان کل مطالبات تا لحظه t یا میزان کل خسارت پرداخت شده توسط شرکت بیمه تا لحظه t است. اگر علاوه بر این سرمایه اولیه شرکت بیمه u و نرخ حق بیمه خالص β باشد آنگاه سرمایه در گردش شرکت بیمه در لحظه t عبارت است از. $U(t)=u+\beta.t-X(t)$.

اگر از $U(t)\leq 0$ یعنی $u+\beta.t\leq X(t)$ آنگاه شرکت بیمه ورشکست می شود. به این دلیل در کاربردها به جای $U(t)$ از $Y(t)=\max\{0,U(t)\}$ استفاده می شود.

نظریه موجودی انبار

حجم آب یک سد یا موجودی انبار یک فروشگاه بزرگ را در نظر بگیرید که با نرخ ثابت β افزایش می یابد. موجودی انبار در نقطه شروع $X(0)=u$. اگر موجودی انبار متناظر با یک فرآیند پواسون کاهش یابد و میزان کاهش متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع با توزیع معلوم باشند. آنگاه $U(t)=u+\beta.t-X(t)$ میزان حجم آب سد در لحظه t و یا موجودی قابل دسترس انبار فروشگاه را نشان می دهد. در این صورت β نرخ ثابت جایگزینی کالاهای مصرف شده و $U(t)\leq 0$ موجودی صفر انبار و یا سد خالی از آب را بیان می کند.

مثال۸ : تعداد زمین لرزه ها در یک ناحیه از فرآیند پواسون با نرخ ۳ در سال پیروی می کند. هر گاه۱۰درصدزمین لرزه ها شدید باشدوتعدادافرادحادثه دیده هر زمین لرزه شدیدیک متغیرتصادفی باتابع احتمال زیرباشد

$$P[X=k]=pq^{k-1} \qquad k=1,2,...$$

الف- متوسط تعداد افراد صدمه دیده تا لحظه t چه قدر است؟

ب- احتمال این که در دو سال آینده بیش از ۵ نفر براثر زمین لرزه شدید حادثه ببینند چه قدر است؟

حل :

$N_1(t)\sim P(0/3t)\equiv$ تعداد زمین لرزه های شدید تا لحظه t و $M_X(z)=\dfrac{pz}{1-qz}$

$X(t)=\sum_{i=1}^{N_1(t)}X_i\equiv$ تعداد کل افراد صدمه دیده از زمین لرزه های شدید تا لحظه t و $X_i\equiv$ تعداد کل افراد صدمه دیده در زمین لرزه شدید iام.

الف-با استفاده ار ویژگیهای تابع مولد احتمال داریم:

$$M_{X(t)}(z)=\exp\left[0/3t\left(\frac{pz}{1-qz}-1\right)\right]=\exp\left[0/3t\left(\frac{z-1}{1-qz}\right)\right]$$

$$E[X(t)]=EX.EN(t)=\frac{0/3t}{p}$$

ب -

$$P[X(t) > ۵] = ۱ - P[X(t) \leq ۵] = ۱ - \sum_{k=۰}^{۵} P[X(t) = k]$$
$$P[X(t) = k] = \frac{۱}{k!} \frac{d^{(k)}}{dz^k} (\exp\left[۰/۳t \frac{z-۱}{۱-qz}\right])\Big|_{z=۰}$$

مثال ۹ : تعداد تلفنهایی که برای سرویس به شرکت تلفن می رسد، در منطقه خاصی فرآیند پواسون با نرخ ۱۵ تلفن در ساعت است . زمان سرویس متغیری تصادفی با میانگین ۹۰ دقیقه و انحراف معیار ۱۵ دقیقه است.

الف – امید ریاضی و انحراف معیار زمان کل سرویسها در طی یک دوره ۸ ساعته چه قدر است ؟

ب – این شرکت تکنسین های کافی برای پوشش دادن به ۲۰۰ ساعت سرویس در طی یک دوره ۸ ساعته دارد. احتمال این که تکنسین های کافی برای پوشش دادن به کار مورد نیاز وجود داشته باشد چه قدر است ؟

حل : $N(t) \sim P(۱۵t)$ ≡ تعداد تلفنها برای سرویس به شرکت تا لحظه t

$E(X_i) = ۱/۵$ و $\sqrt{Var(X_i)} = \frac{۱}{۴}$ و X_i ≡ زمان برطرف کردن اشکال iام

$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ کل زمان سرویس تا لحظه t.

$$E(X(8)) = EN(8) \times E(X_i) = 15 \times 8 \times 1/5 = 230$$
$$Var(X(8)) = Var(N(8))E^2X_1 + E(N(8)).Var(X_1)$$
$$= 15 \times 8 \times (1/5)^2 + 15 \times 8 \times \frac{1}{16} = 277/5$$

ب –

$$P[X(8) \leq 200] \cong P\left[Z \leq \frac{200 - E(X(8))}{\sqrt{Var(X(8))}}\right] = P\left[Z \leq \frac{-30}{\sqrt{277/5}}\right]$$

با استفاده از تقریب نرمال احتمال فوق قابل محاسبه خواهد بود.